

Isolants topologiques sondés par la physique mésoscopique

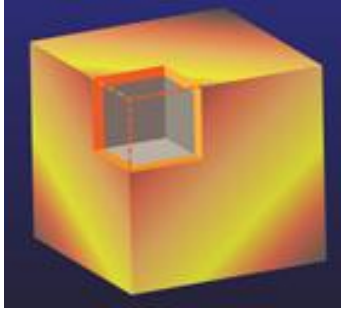
Sophie Guéron

Groupe de Physique mésoscopique

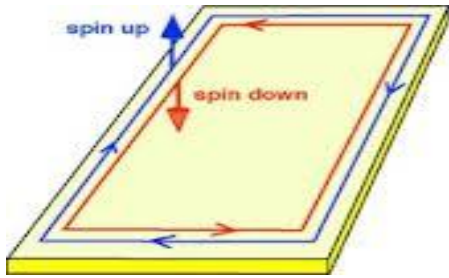
Laboratoire de Physique des Solides Orsay



Isolants topologiques ...

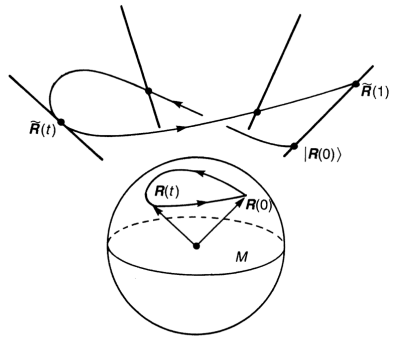


Nouvel état électronique de la matière, insoupçonné il y a 20 ans :
Ni uniformément conducteur ni uniformément isolant:
isolant au coeur, conducteur aux bords



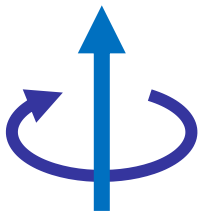
Etats de bords très intéressants

Explication subtile: liée à la façon dont les fonctions d'ondes des électrons évoluent dans un cristal (réseau périodique).



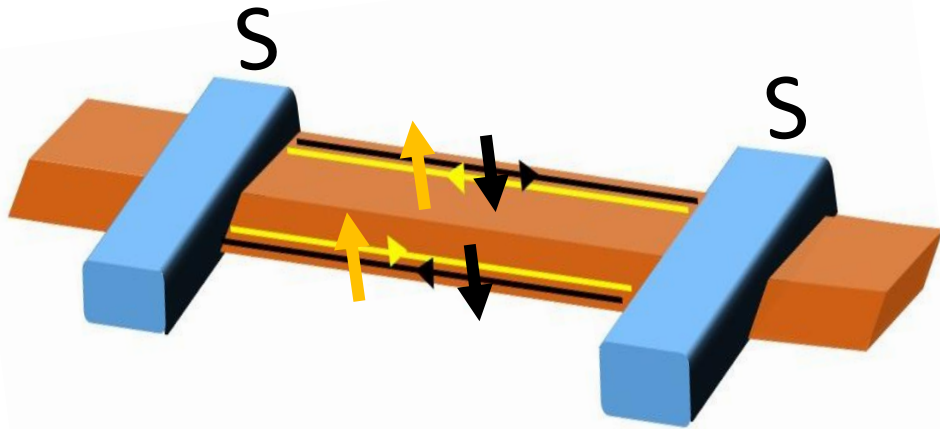
Quel intérêt?

- Topologie génère des états unidimensionnels protégés. Auparavant les états 1D conducteurs étaient rares!
- La topologie et/ou géométrie des bandes génèrent des propriétés intrigantes: par exemple un magnétisme qui n'est pas porté par le spin.

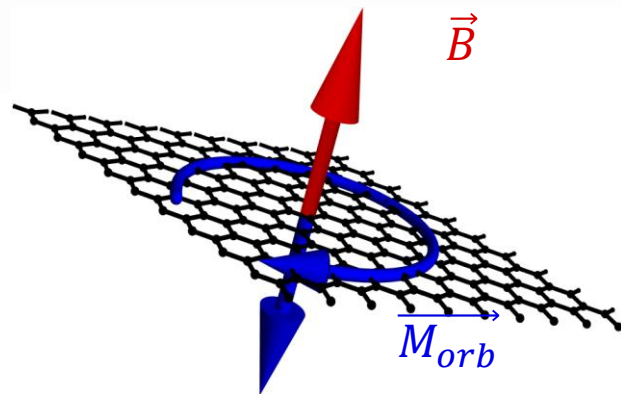


...sondés par la physique mésoscopique

Au-delà de mesure de valeur de conductance.
Deux types d'expériences de physique mésoscopique pour sonder ces propriétés:



1-La supraconductivité induite par effet de proximité pour détecter les états de bords des isolants topologiques



2- Détection du moment magnétique orbital d'origine géométrique dans le graphène

Topologie: certaines propriétés restent inchangées par déformation « douce »
Sont caractérisées par un nombre entier: invariant topologique.

Exemple : le nombre de trous dans une surface

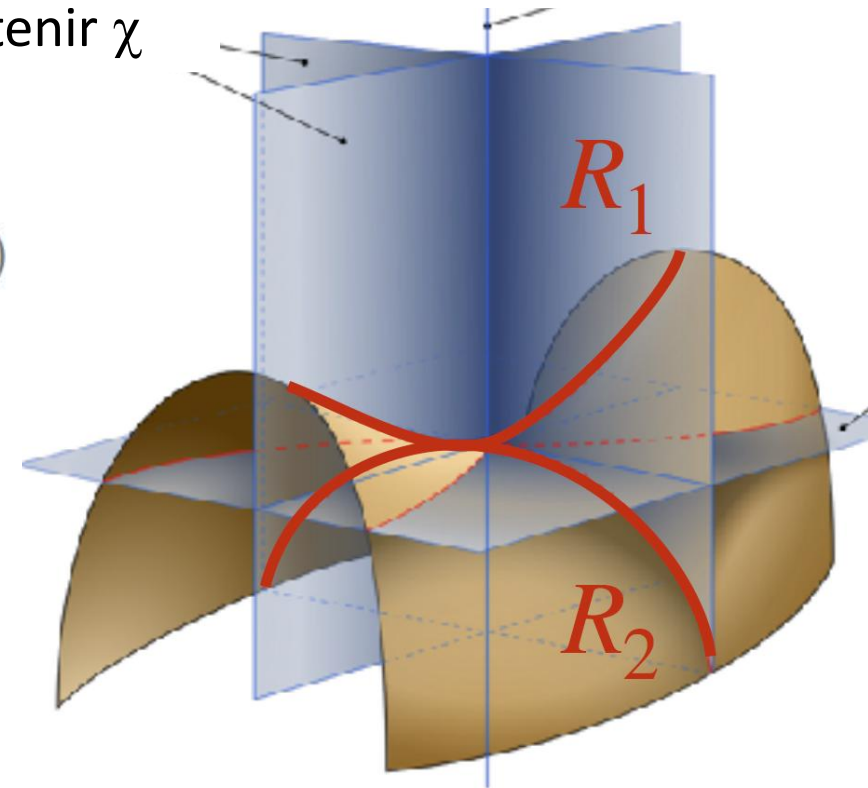
Nombre de trous=genre, « genus » $g = 1 - \chi/2$, χ = caractéristique d'Euler

2 façons de déterminer χ , donc g :

1ère façon: intégrer une quantité locale (la courbure) pour obtenir χ

From local quantity: $\chi = \frac{1}{2\pi} \int_{\text{surface}} \kappa$ (Gauss-Bonnet theorem)

with κ the gaussian curvature $\kappa = 1/(R_1 R_2)$



Intégrale de la courbure (locale) sur toute la surface donne χ donc l'invariant topologique

Topologie: propriétés inchangées par déformation « douce »
Caractérisées par un nombre entier: invariant topologique.

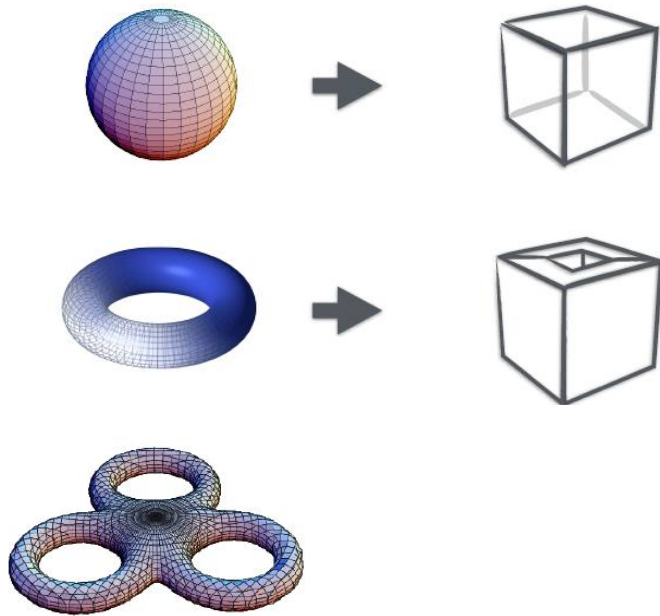
Nombre de trous=genre, « genus » $g = 1 - \chi / 2$, χ = caractéristique d'Euler

2 façons de déterminer χ , donc g :

2ème façon: déformer la surface légèrement pour la transformer en polygone

Puis : Comptage d'un nombre discret d'éléments caractéristiques

$\chi = \text{nb sommets} - \text{nb d'arêtes} + \text{nb de faces}$



$$\chi = 8 - 12 + 6 = +2$$

$$\chi = 16 - 28 + 12 = 0$$

$$\chi = -4$$

Nombre de trous = $g = 1 - \chi / 2$

$$g=0$$

$$g=1$$

$$g=3$$

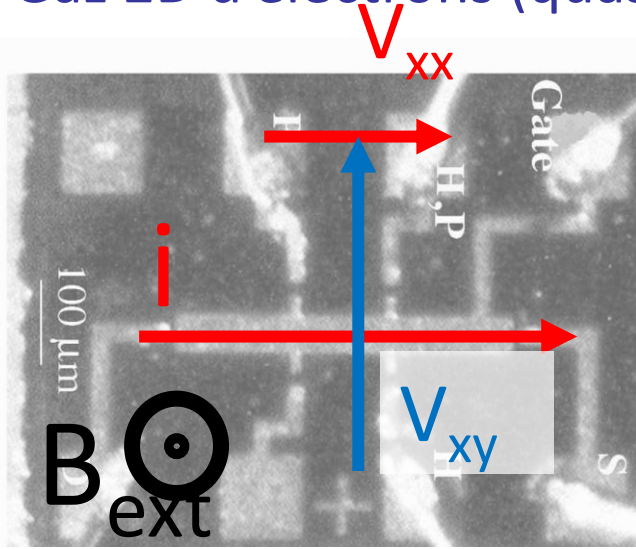
Ce nombre g ,
entier permet de
distinguer des
surfaces de
natures
différentes

On va voir qu'on peut de même calculer des entiers (invariants topologiques),
soit en intégrant sur une surface entière, soit en comptant un nombre fini d'indicateurs,
pour déterminer si un système électronique est topologique ou trivial.

Et dans les solides, propriétés électroniques quantifiées?

Conductance transverse quantifiée dans effet Hall quantique

Gaz 2D d'électrons (quasi libres)



von Klitzing 1980

$$\rho_{\text{Hall}} = \rho_{xy} = V_{xy}/I = B_{\text{ext}}/ne = h/ve^2$$

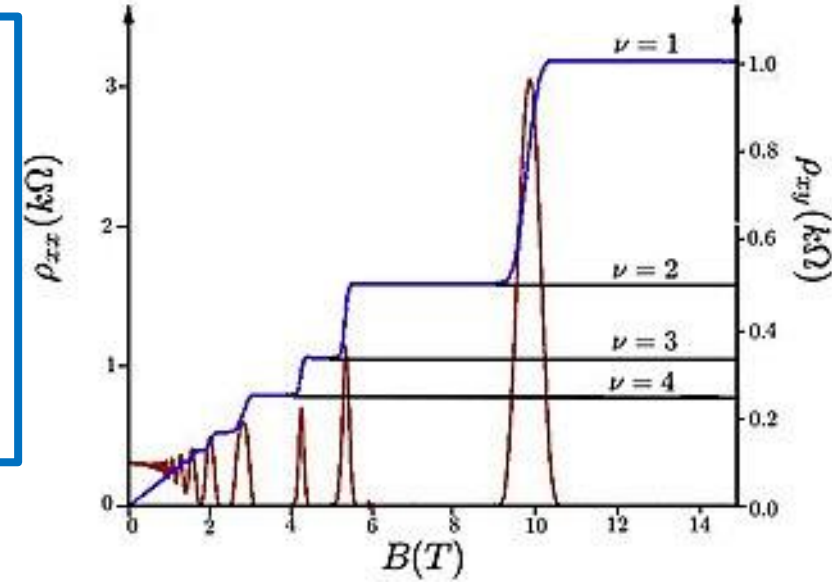
$$\sigma_{xy} = ve^2/h$$

$$R_{\text{longitudinale}} = R_{xx} = V_{xx}/I = 0,$$

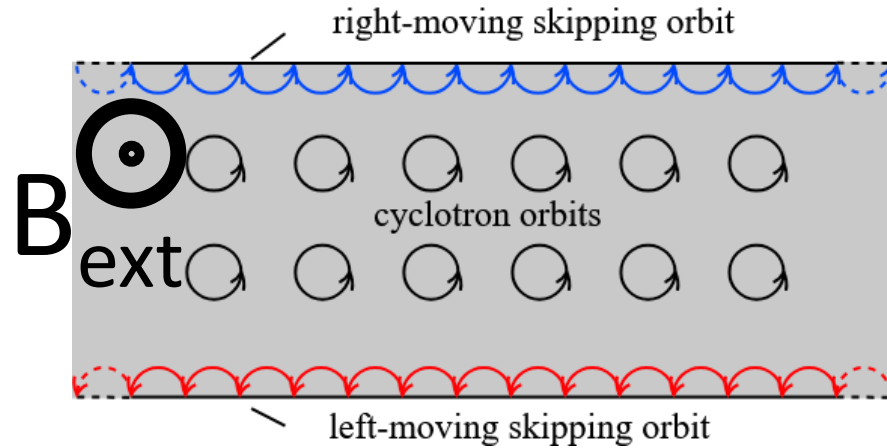
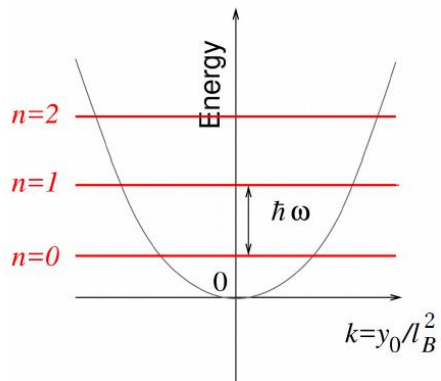
Autour des remplissages ν entiers,

$$\nu = n_{\text{elec}} h/e 1/B_{\text{ext}} = N_{\text{elec}}/N_{\Phi}$$

Quantification extrêmement précise!



Explication: formation de niveaux de Landau en B fort

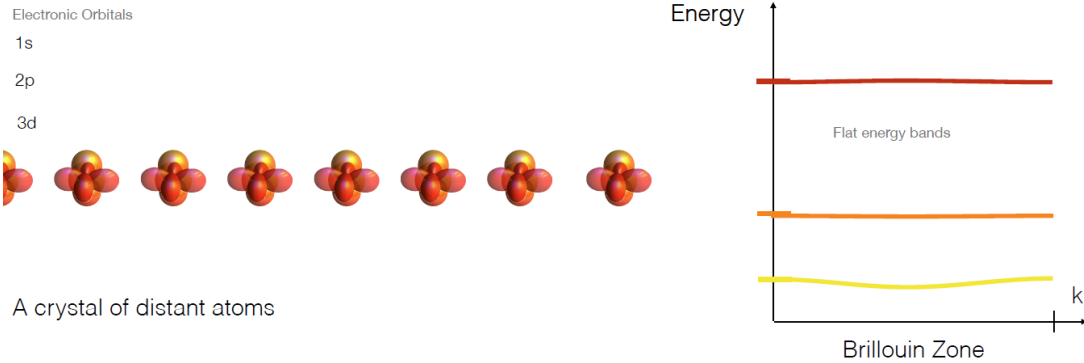


Cœur isolant
Bords conducteurs
(conduction chirale)

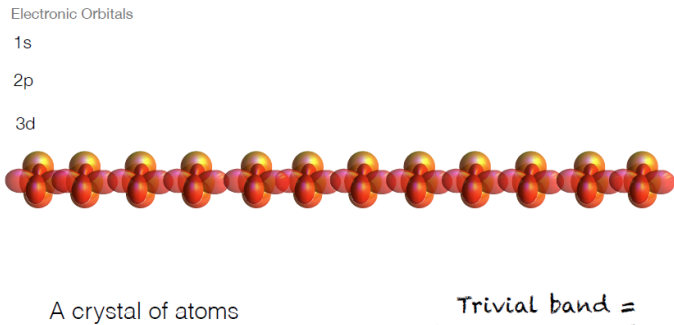
Question: Peut-on avoir $\sigma_{xy} = ve^2/h$ dans $B_{\text{ext}} = 0$??
Oui! Dans conditions très particulières! Il faut un réseau périodique, et théorie moderne des bandes -> **Isolants de Chern**

Avant théorie moderne des bandes, on pensait que seule la relation de dispersion $E(k)$ déterminait les propriétés des solides

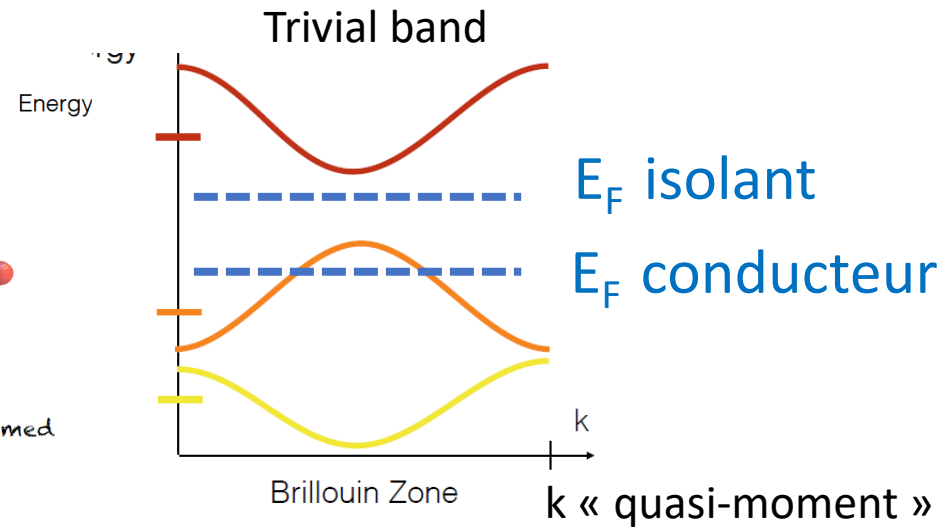
Atomic limit of a band



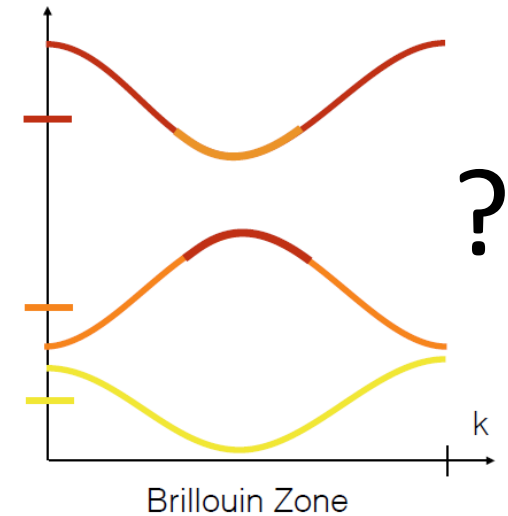
Atomic limit of a band



Trivial band =
Can be smoothly deformed
into atomic band



Non-trivial band



Deux sortes d'isolants, trivial et topologique!

Ne se voit pas sur les bandes! Fonctions d'onde recèlent les propriétés topologiques

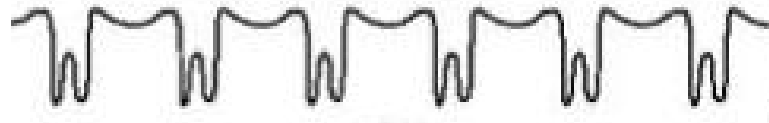
Fonctions d'ondes des électrons dans un cristal

Réseau « direct » (espace réel)



$V(r)$

Potentiel périodique des atomes (période a)



$u(k,r)$

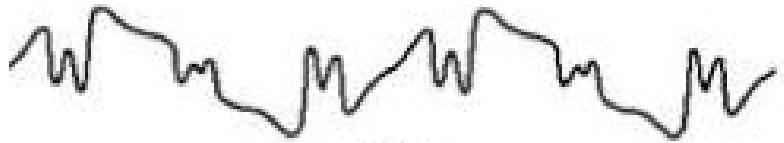
Théorème de Bloch: Fonction d'onde $\psi_k =$ produit de u_{nk} , périodique

$$u_{n,k}(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = u_{n,k}(\mathbf{r})$$

x onde plane $\exp(ikx)$, avec k varie entre $-\pi/a$ et π/a



$\exp(ik \cdot r)$

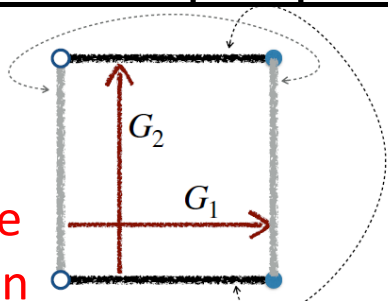


$\psi(k,r)$

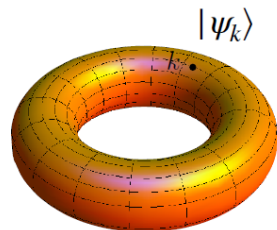
Fonction d'onde totale $\psi_k \quad |\psi_{n,k}\rangle = e^{ik \cdot r} |u_n(\mathbf{k})\rangle$

Réseau réciproque: A 2D, k dans plan (k_x, k_y) & périodicité en $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2$

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{G}_j = 2\pi \delta_{ij}$$



=



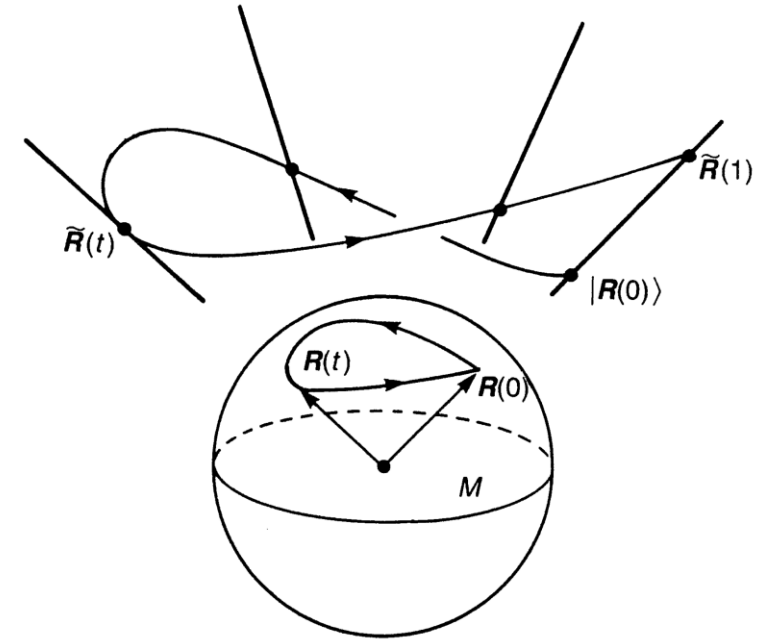
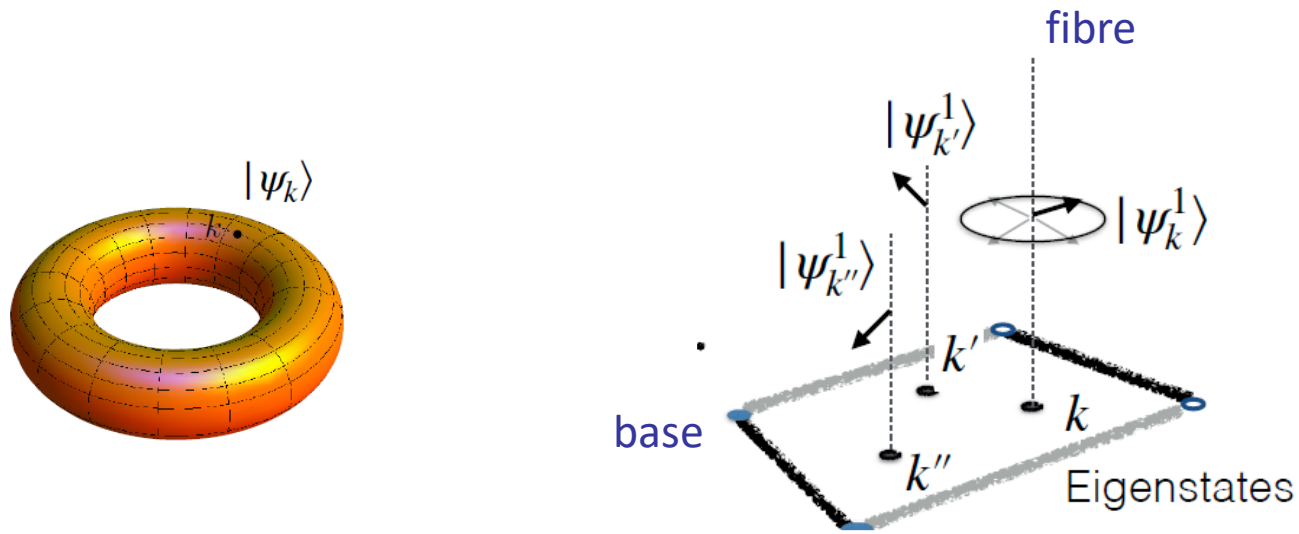
$|\psi_k\rangle$

$$H(\mathbf{k}) |u_n(\mathbf{k})\rangle = E_n(\mathbf{k}) |u_n(\mathbf{k})\rangle.$$

Zone de Brillouin

Les k évoluent sur un tore. Que font les fonctions d'onde $u_n(\mathbf{k})$?

Phase des fonctions d'onde $u_n(k)$ joue une rôle



A chaque k du tore (base) correspond un $u(k)$,
avec une phase (\sim position sur la fibre)

Figure 10.7. If the parameter changes adiabatically along a loop $\mathbf{R}(t)$, the state with initial condition $|\mathbf{R}(0)\rangle$ becomes $|\tilde{\mathbf{R}}(1)\rangle$ which is different from $|\mathbf{R}(0)\rangle$ in general. The difference is the holonomy and is identified with Berry's phase.

Si on ne peut pas avoir un choix de phase continu pour k parcourant toute la zone de Brillouin, i.e. si l'état est différent quand k revient au point de départ:

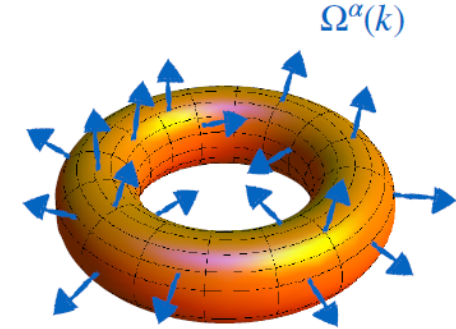
Topologie non triviale.

Topologie donnée par l'évolution des $u_n(k)$ et leur « rephasage »

Cette « torsion » dans la phase de la fonction d'onde peut être calculée

Courbure de Berry: définie localement, caractérise l'évolution des fonctions d'onde

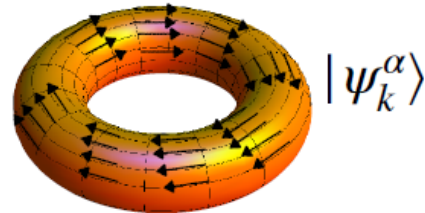
$$\Omega(k) = \nabla_k \times \frac{1}{i} \langle u_k | \nabla_k | u_k \rangle$$



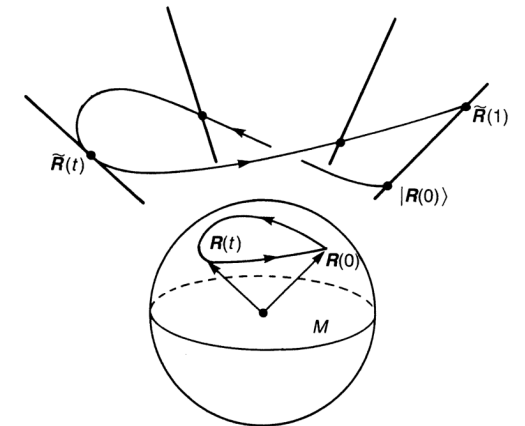
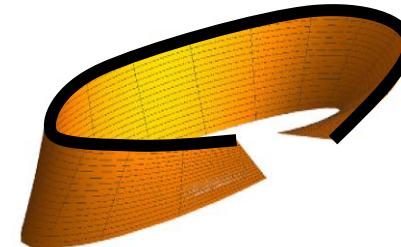
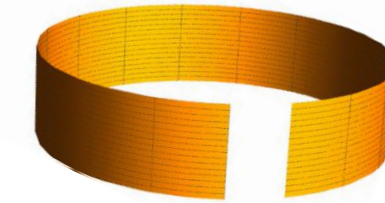
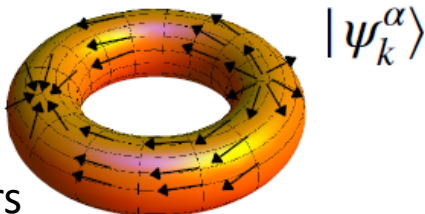
Topologique si intégrale de $\Omega(k)$ sur tout l'espace des paramètres est non nulle

- Topological (Chern) number: $C_1 = \frac{1}{2\pi} \int dS \Omega$

Chern number = 0



Chern number $\neq 0$



Singularité du champ de vecteurs

Si intégrale de la courbure de Berry non nulle: Isolant de Chern.

Courbure de Berry seule et intégrée

Termes additionnels dans équations semi classiques du mouvement (dans champ électrique \mathbf{E})

Force ($dp/dt=F, p=\hbar k$):

Gradient de
potentiel

Lorentz

$$\dot{\mathbf{k}} = -\frac{1}{\hbar} \nabla_{\mathbf{r}_c} \tilde{E}_n - \dot{\mathbf{r}}_c \times \frac{e}{\hbar} \mathbf{B}(\mathbf{r}_c)$$

$$\dot{\mathbf{k}} = -\frac{e}{\hbar} \mathbf{E}$$

Vitesse :

$$\dot{\mathbf{r}}_c = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\mathbf{k}} \tilde{E}_n - \dot{\mathbf{k}} \times \Omega(k),$$

vitesse de groupe
habituelle

vitesse anormale : transverse!
Duale de force de Lorentz

- $\Omega(k) \rightarrow$ moment orbital = énergie x courbure de Berry

$$m_n(\mathbf{k}) = -\frac{e}{2} \langle \mathbf{r} \times (\mathbf{v} - \langle \mathbf{v} \rangle) \rangle$$

$$\mathcal{M}_\alpha = \frac{e}{\hbar} \varepsilon_{\alpha,0} \Omega_c$$



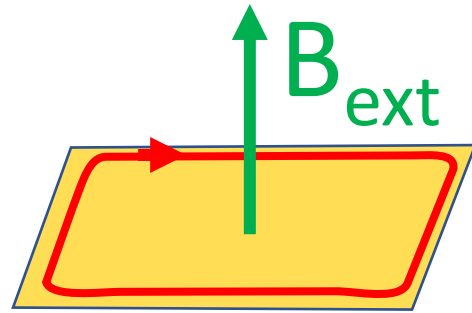
- $\Omega(k) \rightarrow$ conductance Hall Quantifiée, si intégrale de vitesse anormale est non nulle

$$\mathbf{j}_n = -\frac{e^2}{h} \mathbf{E} \times \int_{T^2} \frac{d^2 \mathbf{k}}{2\pi} \Omega_n(k) = -\frac{e^2}{h} C_n \mathbf{E} \times \mathbf{e}_z. \quad \sigma_{xy} = -\frac{e^2}{h} \sum_{n \leq n_F} C_n = -\frac{e^2}{h} n_H$$

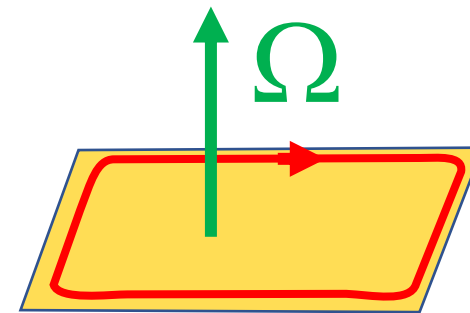
Isolant de Chern: conductance
quantifiée sans niveau de
Landau!

Pur effet de courbure de Berry

Isolants de Chern ~ effet Hall quantique sans champ B_{ext}



Effet Hall Quantique



Isolant de Chern, C

C = Flux de Ω (dans Zone de Brillouin)

$$\sigma_{xy} = -\frac{e^2}{h} \sum_{n \leq n_F} C_n$$

- Conduction parfaite via états de bord chiraux (direction de propagation: signe de B_{ext} ou C)
- Symétrie de renversement du temps brisée

Différences:

Système électronique:

Gaz 2D, pas de réseau, conducteur OK

Réseau cristallin, Modèle Haldane (1988), isolant

Quantification de σ_{xy} due à:

Flux de B_{ext}

Flux de courbure de Berry ($B_{\text{ext}}=0!$)

Nb d'états de bord:

nb de quanta de flux

nb de bandes pleines

Réalisation expérimentale?

Dans tous les gaz 2D en champ fort

Très peu jusqu'à très très récemment!

Peut-on avoir de la topologie dans des systèmes qui préservent la symétrie par renversement du sens du temps?

Enfin: Les isolants topologiques proprement dits!

Symétrie de renversement du sens du temps -> Intégrale de courbure de Berry nulle!

Nombre de Chern total nul! Pas de quantification de la conductivité de Hall! Aucun intérêt??

Idée (Kane et Mele, 2005):

Remplacer le terme orbital en B_z dans Hamiltonien: $(p-eA)^2 \rightarrow \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} = B_z L_z$

par un terme qui préserve la symétrie T: Interaction spin orbite: $\lambda_{so} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \rightarrow \lambda_{so} S_z L_z$ B_z remplacé par le spin!

Spin up, spin dn -> deux sens de rotation!



$$C_{\uparrow} = -C_{\downarrow}$$

Etats de bords « hélicaux »: les deux chiralités, « filtrées » en spin : spin-momentum locking

helical = $\text{chiral}(B_{so}, \uparrow) + \text{chiral}(-B_{so}, \downarrow)$

Conductance Hall (de charge) nulle

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{2}(\sigma_{xy}^{\uparrow} + \sigma_{xy}^{\downarrow}) = \frac{C_{\uparrow} + C_{\downarrow}}{2} \frac{e^2}{h} = 0$$

Conductance Hall de spin non nulle « Quantum spin Hall »

$$\sigma_{xy}^s = \frac{1}{2}(\sigma_{xy}^{\uparrow} - \sigma_{xy}^{\downarrow}) = \frac{C_{\uparrow} - C_{\downarrow}}{2} \frac{e^2}{h} \equiv C_s \frac{e^2}{h} = \frac{e^2}{h}$$

Etats de bords « hélicaux »: rétrodiffusion impossible, conduction protégée par sym. renversement du sens du temps

Nouvel invariant topologique « nombre de Chern de spin » : \mathbb{Z}_2 : 0 ou 1, parité du nombre d'états hélicaux

Voilà les isolants topologiques!

Ces isolants topologiques « Z2 » existent-ils vraiment ?

Il faut: **fort spin orbite**, **et** torsion dans la phase de la fonction d'onde: réalisé par une « **inversion de bande** ».

Prédiction théorique: puits quantiques 2D CdTe/HgTe/CdTe, Bernevig, Hughes, Zhang, Science 2006

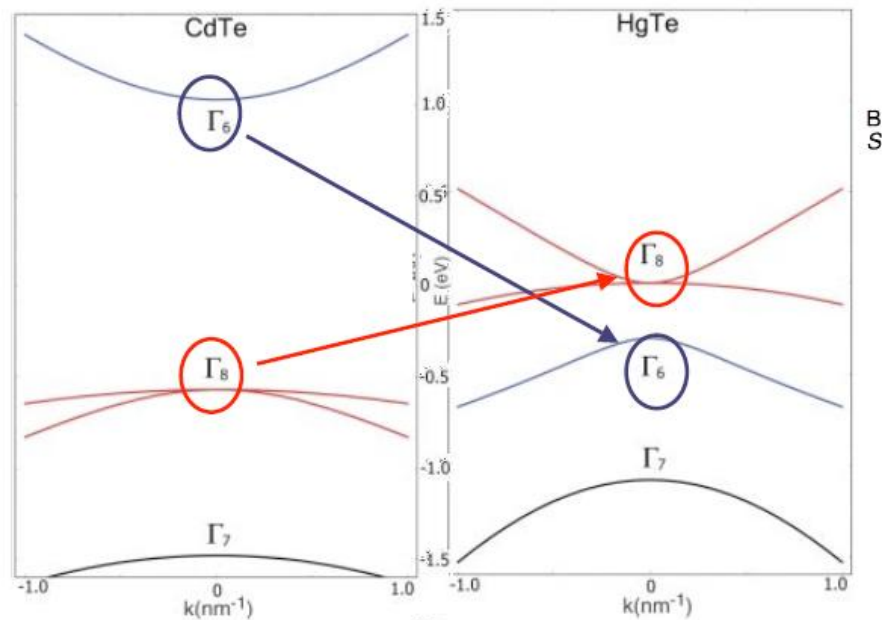
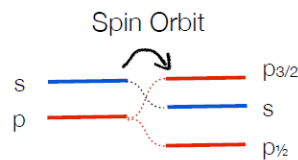
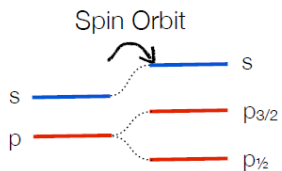
Bandes des deux matériaux

CdTe: « Normal » :

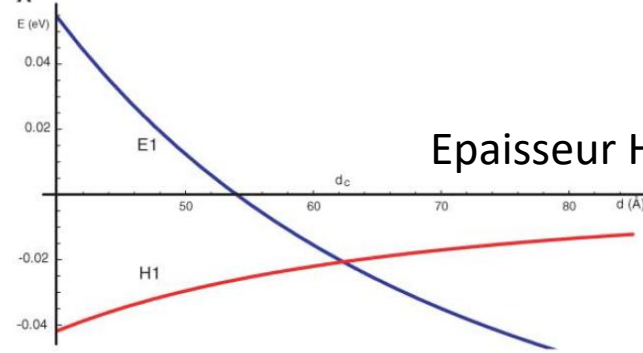
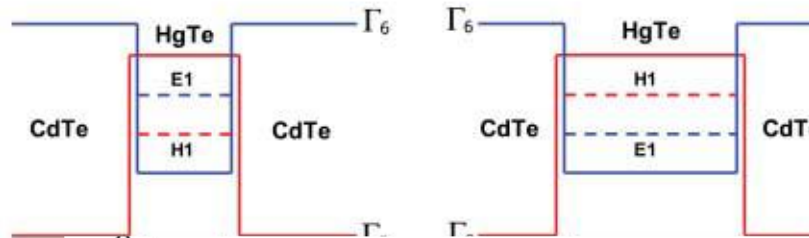
s-type Γ_6 above p-type Γ_8

HgTe: « inverted »

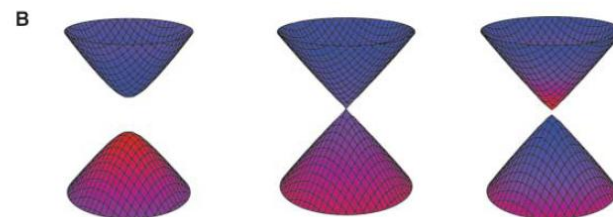
(stronger spin-orbit)



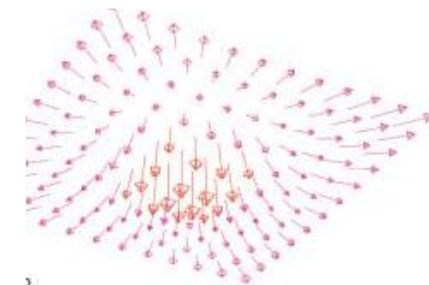
Bandes et fonctions d'onde du puits quantique



Isolant
« trivial »



Isolant
« inversé »



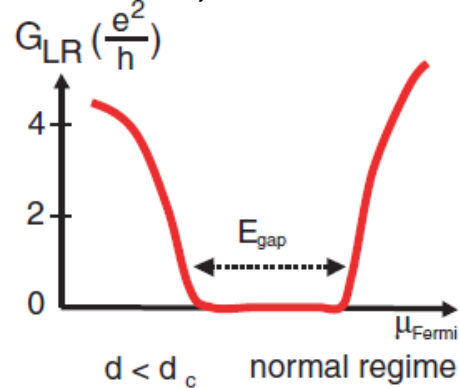
Champ de
vecteur
singulier

Inversion au point Γ , Torsion de phase
Réalisation expérimentale de cette prédiction?

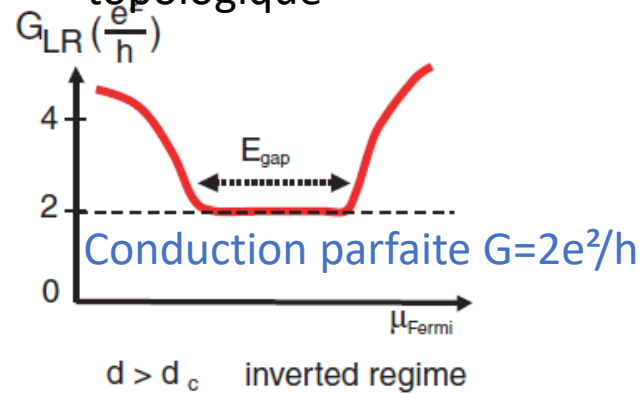
Réalisation expérimentale des isolants topologiques « Z2 » prédits

HgCdTe/HgTe/HgCdTe

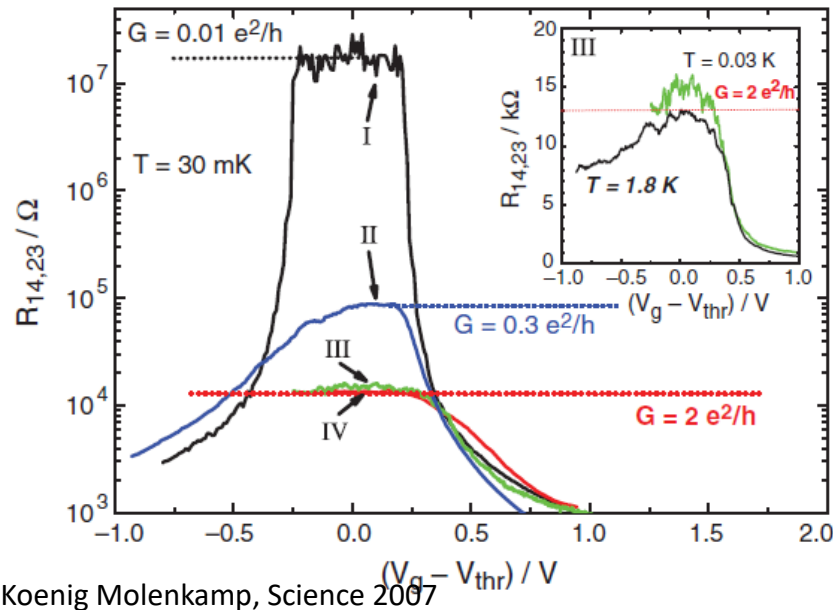
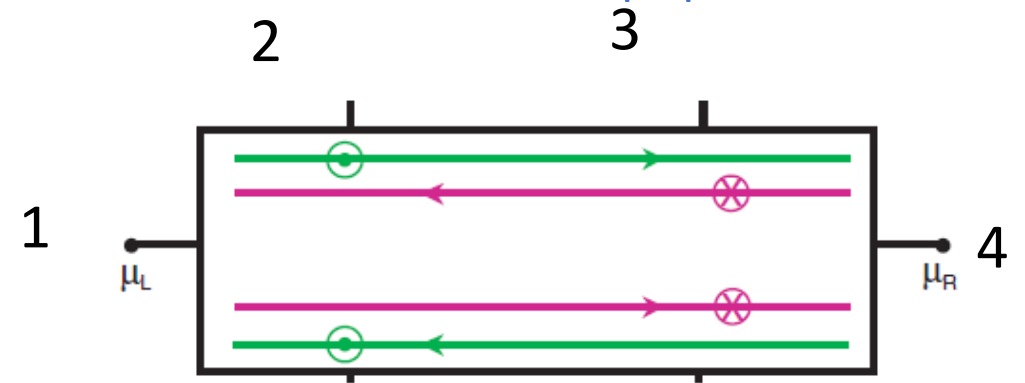
Puits de faible épaisseur
Isolant trivial, conductance nulle



Puits d'épaisseur $>$ à l'épaisseur critique: Isolant topologique



Rétrodiffusion impossible si symétrie de renversement du sens du temps préservée



Koenig Molenkamp, Science 2007

Conséquence: Etat topologique « Quantum Spin Hall » détecté via la conduction parfaite des états de bords
Lorsque le puits quantique est tel que sa bande est inversée

Conduction parfaite sur environ 1 micron.

Peu d'autres systèmes 1D conducteurs!

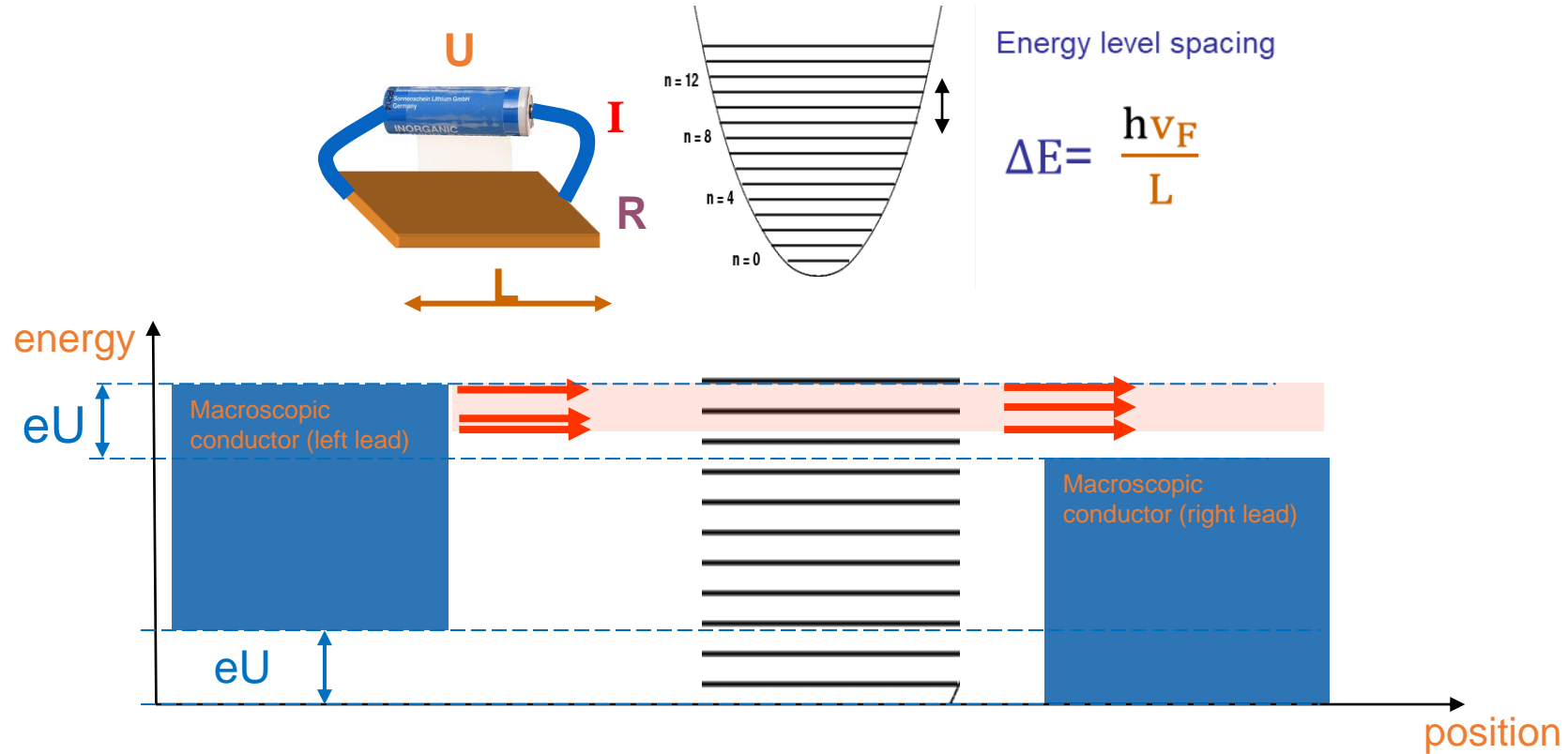
Depuis, aussi bismuthène, monocouche de WTe2 (S. Wu, Science 2018)

Ont aussi démontré que la conduction parfaite a lieu aux bords de l'échantillon (Roth, Molenkamp 2009)

e^2/h conductance of a single conducting channel

Quantum conductor: confinement leads to quantized energy levels

$$E = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}, \quad k_n = n \frac{2\pi}{L}$$



$$I = I_{\text{electron}} \times \# \text{electrons in energy range } eU = e \frac{v_F}{L} \frac{eU}{\Delta E} = \frac{e^2}{h} U$$

$$G = \frac{I}{U} = \frac{e^2}{h} = G_Q$$

$e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Cb}$, $h = 6.64 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$

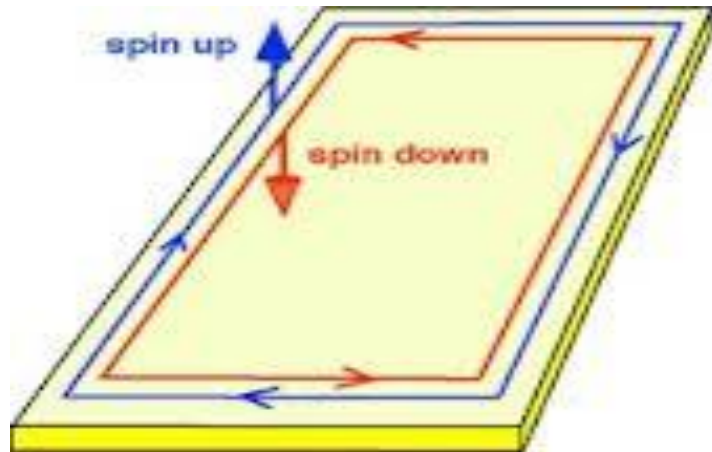
Conductance quantum! Universal constants

$$G_Q = \frac{e^2}{h} = \frac{1}{R_Q} = \frac{1}{25.8 \text{ k}\Omega}$$

Discovered in the context of the Quantum Hall effect (von Klitzing 1985)

Etats hélicaux 1D pas seulement dans les isolants topologiques 2D, Mais aussi dans des isolants (semi-métaux) 3D: Isolants topologiques d'ordre 2

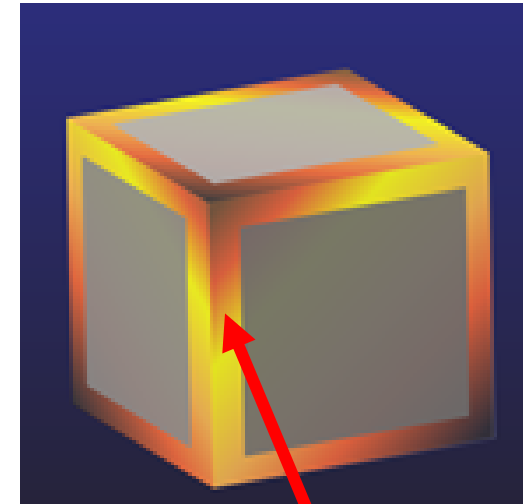
2D Topological Insulators



Single band inversion

insulating bulk
1D helical edges states

3D Second order Topological Insulator



Double band Inversion

insulating bulk
insulating surfaces
1D helical « hinge » states

SOTI prédits théoriquement, découverte surprise à Orsay, grâce à la supraconductivité de proximité

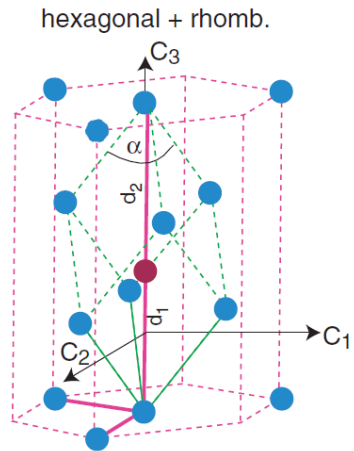
Schindler *et al*, Sci. Adv. (2018)
Geier *et al*, Phys. Rev. B (2018)
Xie *et al*, Nat. Rev. Phys. (2021)

En pratique, Isolant topologique d'ordre 2 trouvé expérimentalement (à Orsay et Princeton) dans le Bismuth, qui n'est pas un vrai isolant! Théorie

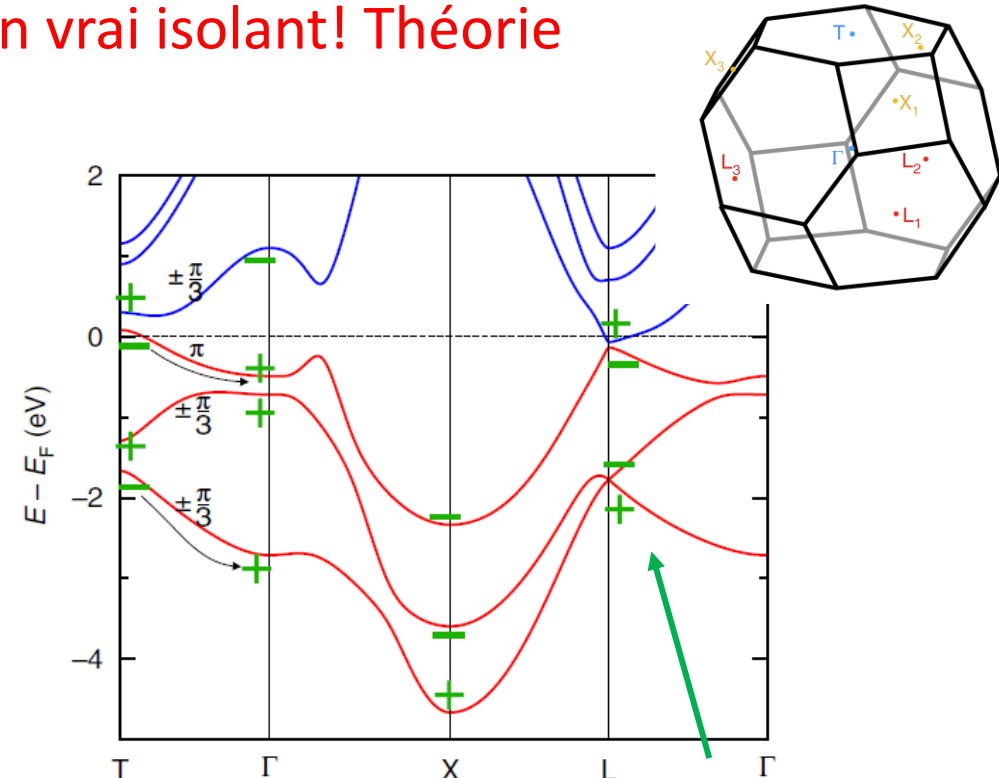
1 Symétrie du bismuth

2 Recette pour déterminer topologie (Fu Kane):

Inversion et rotation C_3
+temps (TRS)



Calculer nombre d'inversions des bandes occupées:
il suffit de calculer aux points TRIM de la zone de Brillouin : invariants par inversion de t
(cf calcul du genre de surface)



Parité de fonction d'onde de Bloch en ce point

Invariant topologique de Fu & Kane (pour IT Z2) $\nu = \nu_T \nu_\Gamma \nu_X \nu_L = +1$

⇒ nombre pair d'inversions: le bismuth n'est pas un isolant topologique (trivial à l'ordre 1)

Mais n'est pas trivial à l'ordre 2!

Nombre impair d'inversion dans chaque sous espace de C_3

$$\nu(\pi) = \nu_T^{(\pi)} \nu_\Gamma^{(\pi)} \nu_X \nu_L = -1$$

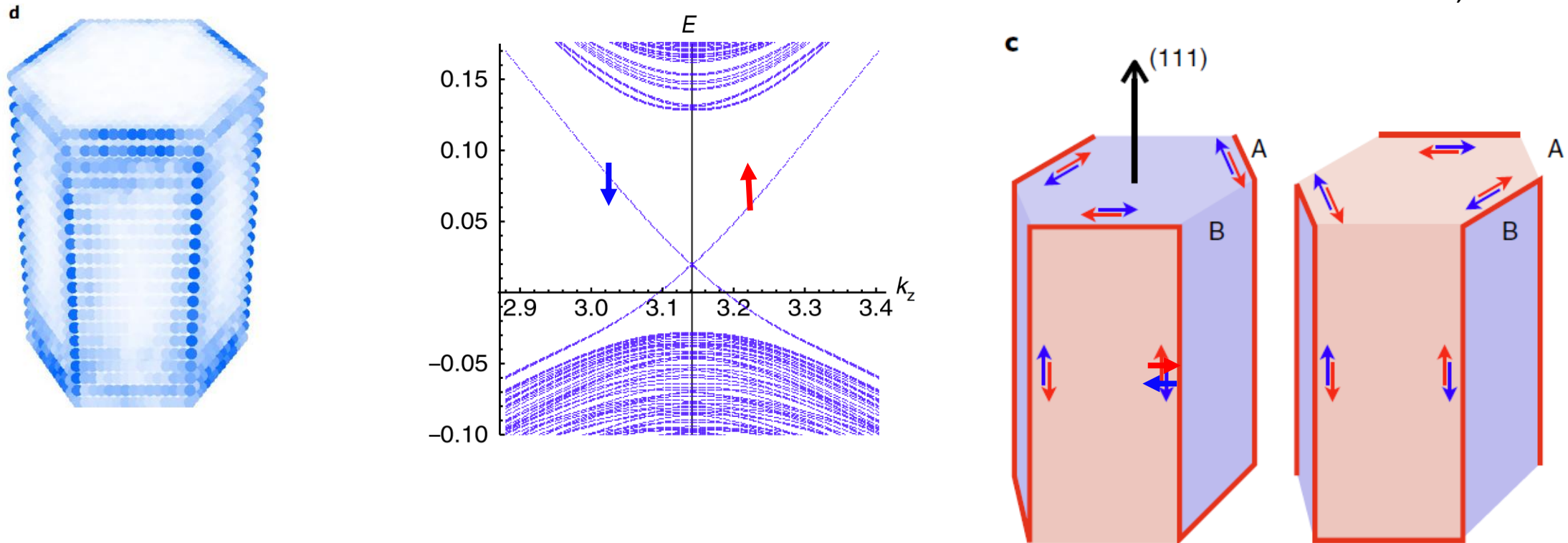
$$\nu(\pm\pi/3) = \nu_T^{(\pm\pi/3)} \nu_\Gamma^{(\pm\pi/3)} = -1$$

Double inversion de bande= isolant topologique d'ordre 2

Conséquence: Etats hélicaux à l'interface de facettes de « masse » opposées

Etats hélicaux prédits aux charnières dans les cristaux de bismuth

Schindler et al, Nat. Phys. 2018

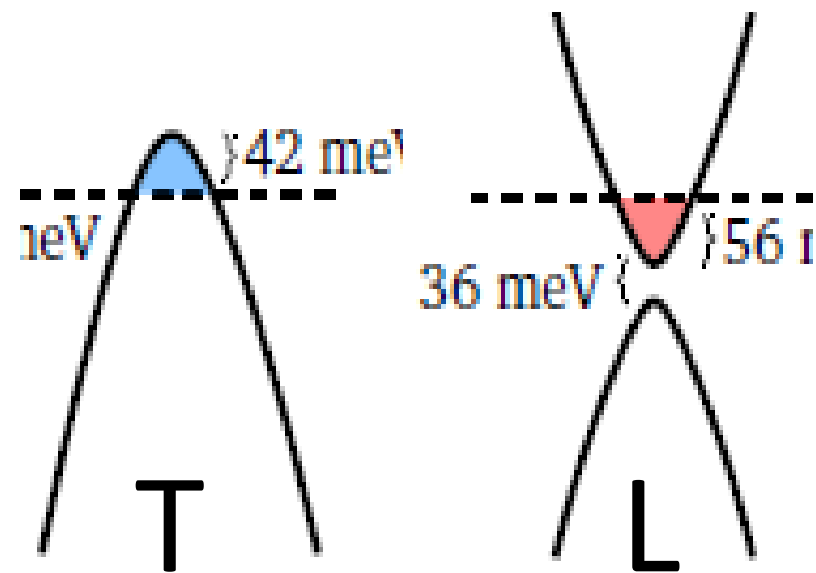
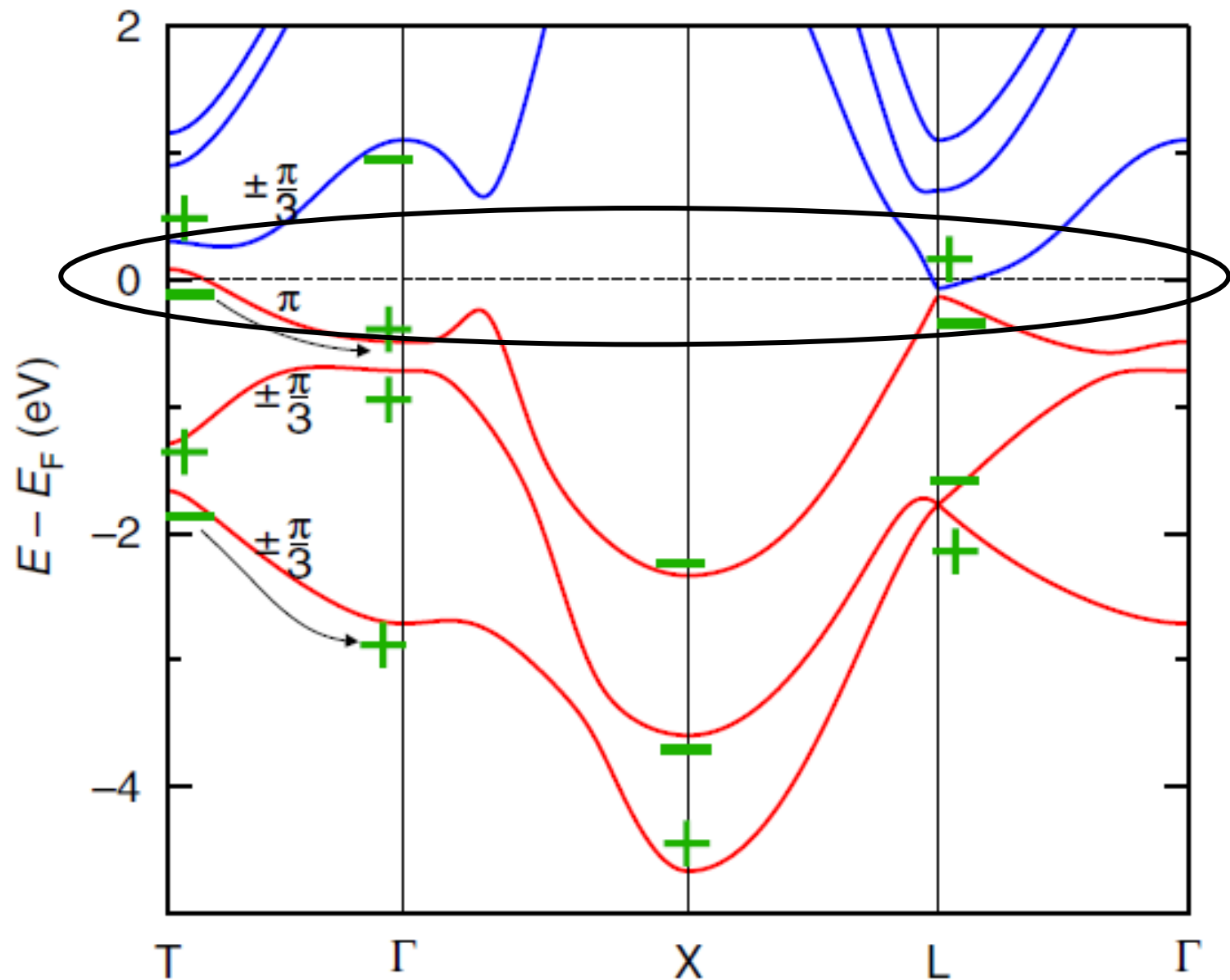


Comment les détecter expérimentalement?

Problème: le bismuth n'est pas un vrai isolant!

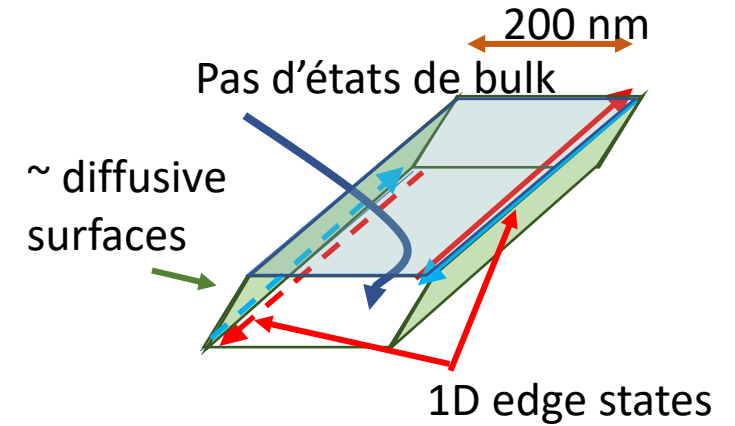
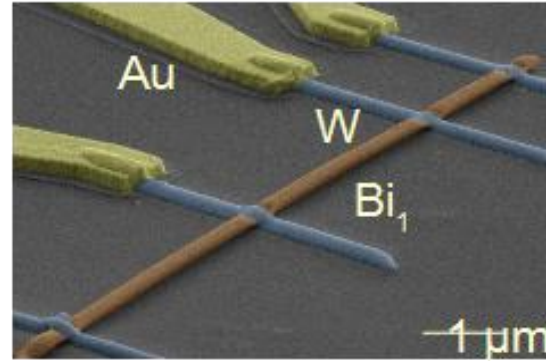
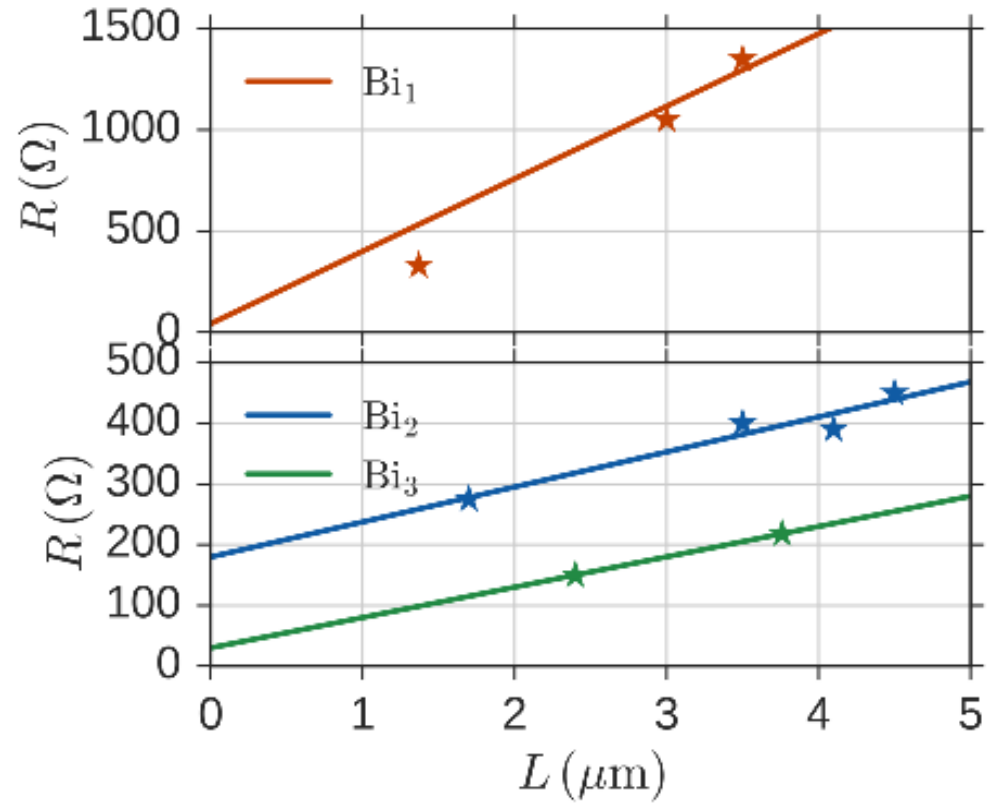
De nombreux états de surface triviaux (non topologiques) existent, peuvent masquer les états parfaitement conducteurs sur les charnières.

But... Bismuth is a semimetal, not an insulator! Many trivial states



Normal transport doesn't show traces of ballistic states

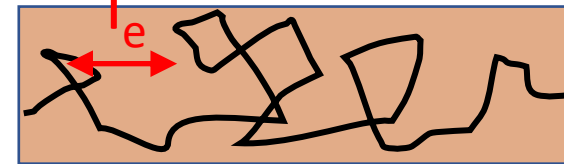
Resistance versus segment length



$$R(L) = R_{\text{contact}} + \frac{R_0}{M_{\text{canaux}}} \frac{L}{l_e} \quad R_Q = \frac{h}{e^2}$$

Transport diffusif

$$l_e \ll L$$



$$R \propto L$$

Transport
ballistique

$$l_e \gg L$$



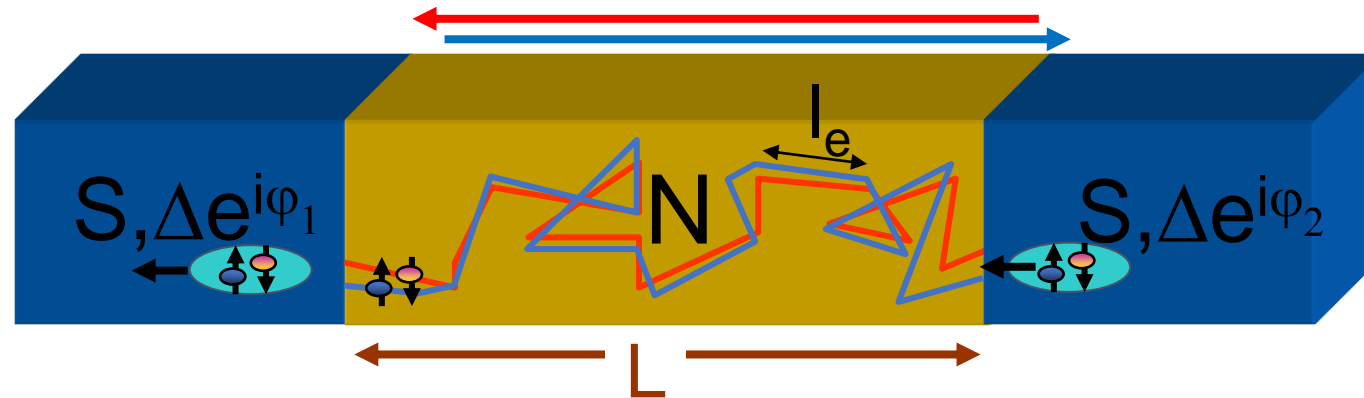
$$R = h/e^2, \text{ indépendant de } L$$

Trivial diffusive surface states carry almost all the normal current

⇒ Turn to supercurrent to enhance visibility of topological (« helical ») states

Supercurrent through a non-superconducting material?

Superconductor/Non-superconductor (normal)/Superconductor junction

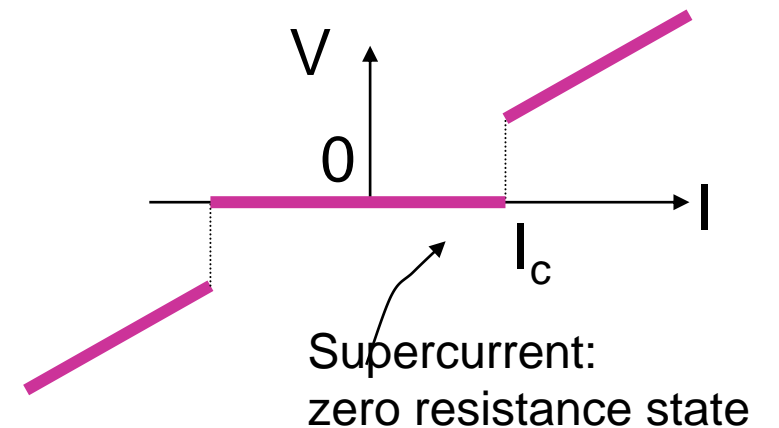


Pair of **time-reversed** electrons goes from S to S via N

$$T < T_{\text{phase coherence}}$$

Consequence:

If N is coherent, i.e. no change of quantum state during propagation): **Supercurrent!**

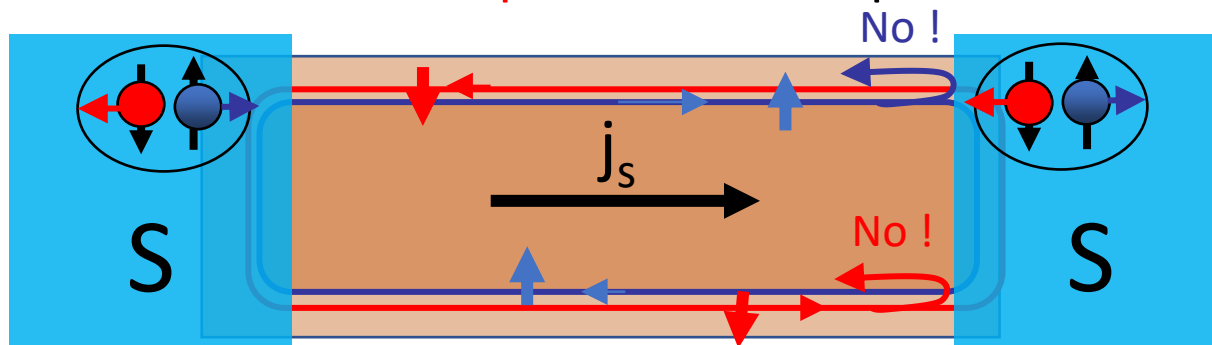


Pourquoi la supraconductivité induite permet de révéler les états hélicaux

1-Etats hélicaux prennent une importance relative amplifiée par rapport aux états triviaux

Deux raisons:

- Supraconductivité de proximité révèle les états balistiques car supercourant est $(L/le)^2$ fois plus grand que pour états diffusifs. (L/le) pour courant normal).
- Transmission d'un état hélical 1D **parfaite** d'un supraconducteur à un autre



No backscattering allowed
(only for topological « helical
channel »): Perfect
transmission into S!

2-La supraconductivité de proximité permet de « voir » où passe le supercourant:

La figure d'interférence dans un champ magnétique (cf SQUID) est la transformée de Fourier de la distribution spatiale du supercourant.

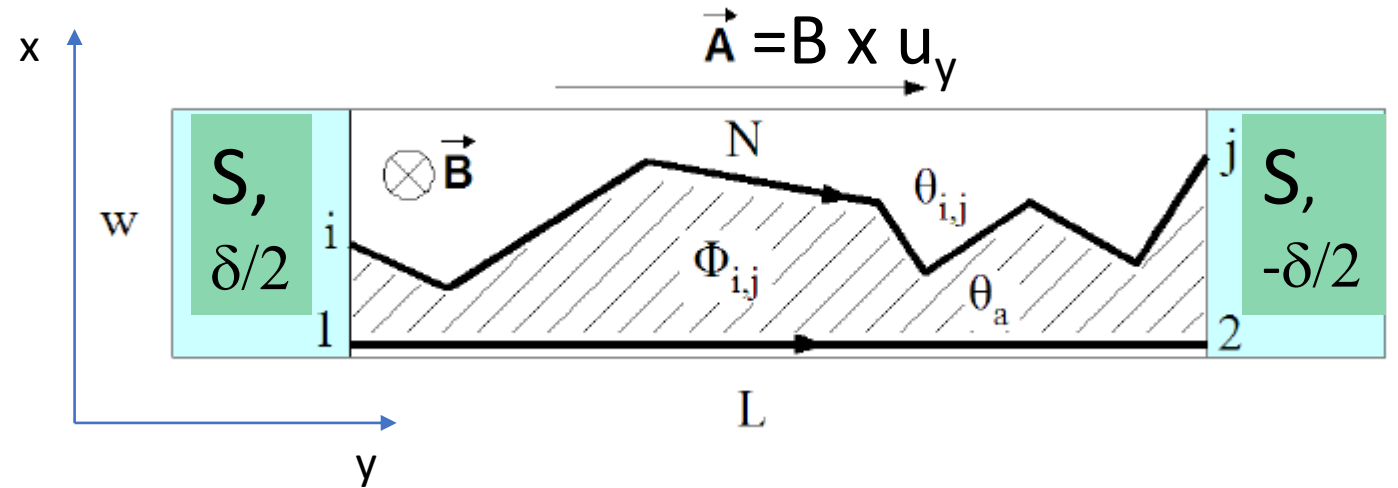
Permet même de déterminer si les canaux hélicaux sont étroits ou larges.

3-Permet d'autres choses aussi (voir si le transport est **ballistique, topologiquement protégé,...**) mais pas le temps!

Superconducting contacts to exploit macroscopic wavefunction (and its phase): Interference experiments will reveal where supercurrent flows

Gauge invariant Josephson relation:

$$I(\delta) = I_0 \sin \left(\delta - \frac{2e}{\hbar} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right)$$



Critical current $I_c(B) = \max$ of integral over all supercurrent paths: interference terms!

$$I_c(B) = \left| \int_{-W/2}^{W/2} J(x) \cdot e^{2\pi i L B x / \Phi_0} dx \right|$$

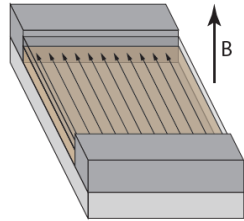
Critical current $I_c(B) = |\text{Fourier transform of supercurrent distribution } J(x)|$

Superconducting contacts to exploit macroscopic wavefunction (and its phase):

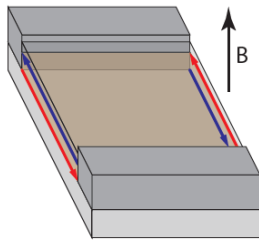
Interference experiments will reveal where supercurrent flows

Critical current $I_c(B)$ = transformée de Fourier de distribution transverse du supercourant

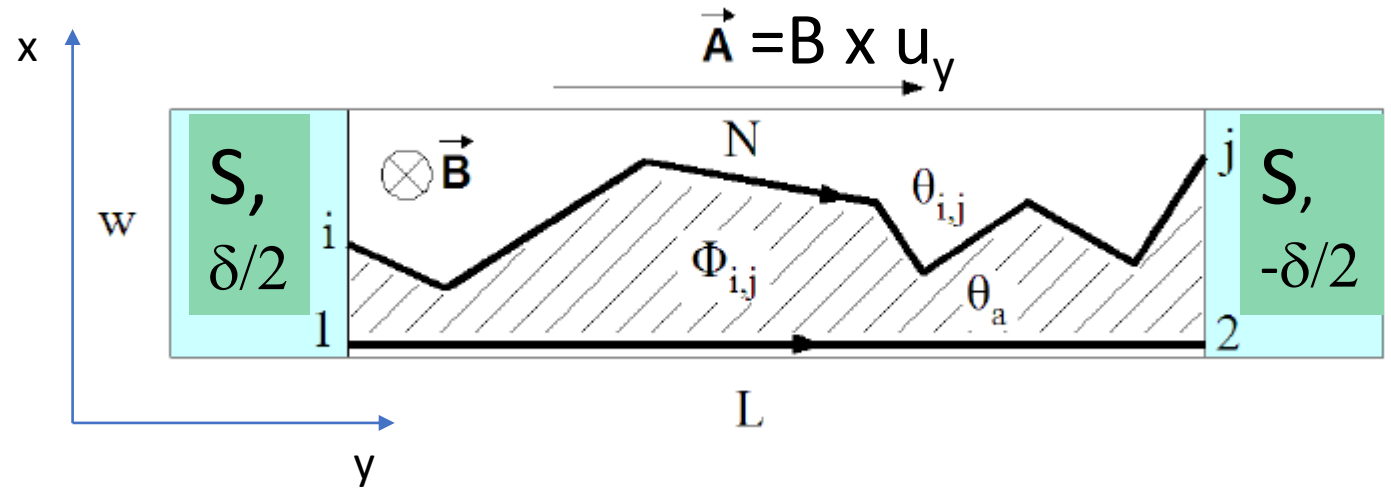
$$I_c(B) = \left| \int_{-W/2}^{W/2} J(x) \cdot e^{2\pi i L B x / \Phi_0} dx \right|$$



Distribution uniforme: |TF fonction porte| -> |sinc|



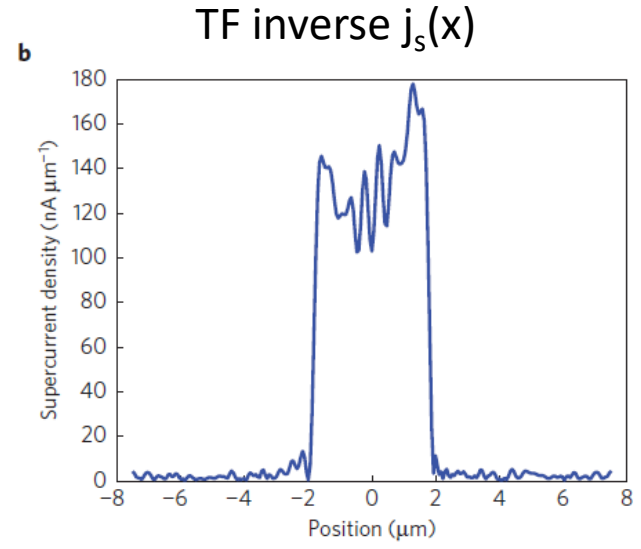
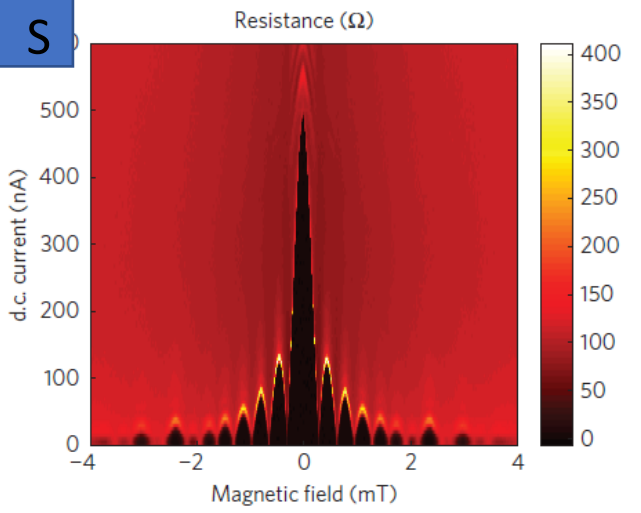
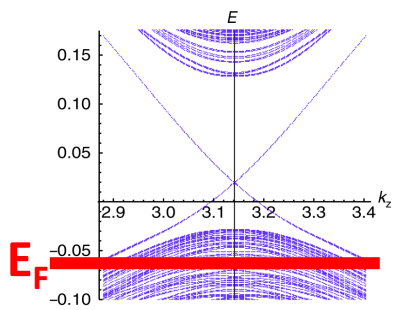
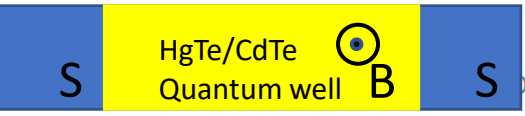
Supercourant sur deux bords: |TF $\delta(x-W/2) + \delta(x+W/2)$ | -> |cos|



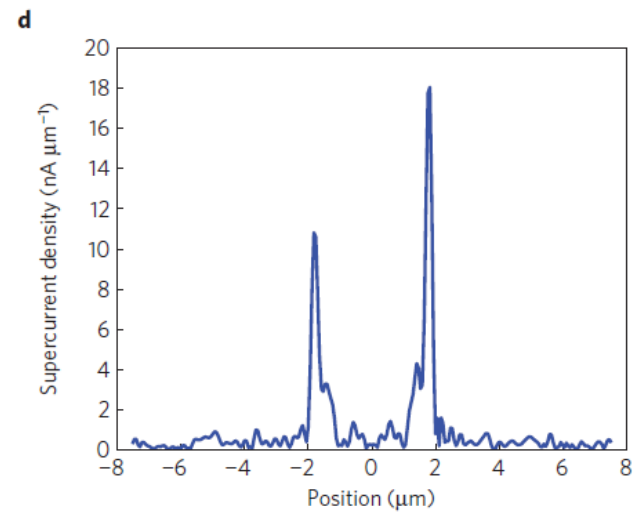
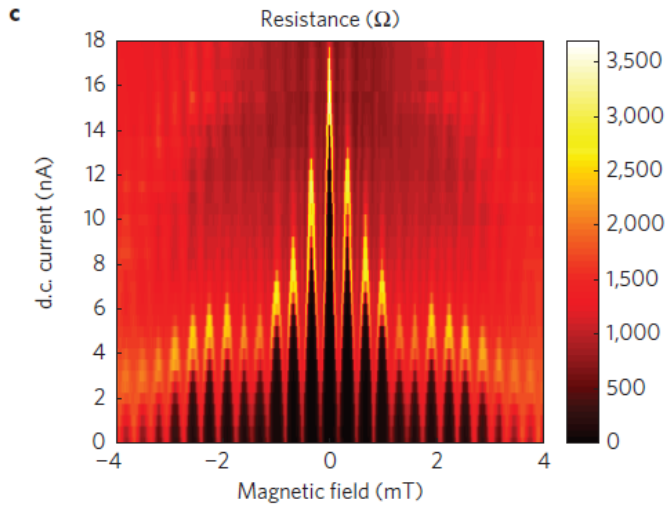
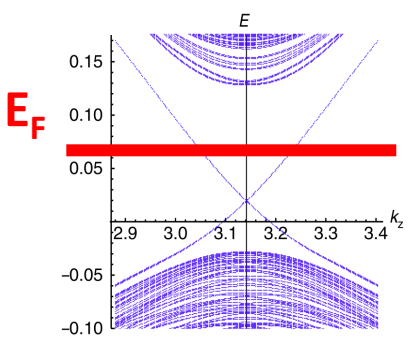
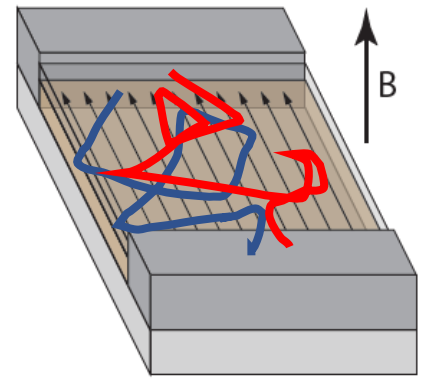
Critical current $I_c(B)$ = |Fourier transform of supercurrent distribution $J(x)$ |

La supraconductivité de proximité pour détecter les états de bord

Dans les isolants topologiques 2D: Hart, Molenkamp, Yacoby, Nature 2014



Supercourant dans tout l'échantillon



Supercourant porté par les bords!

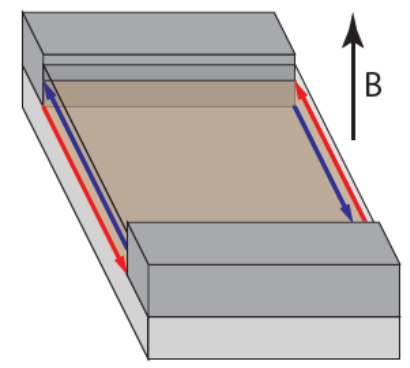


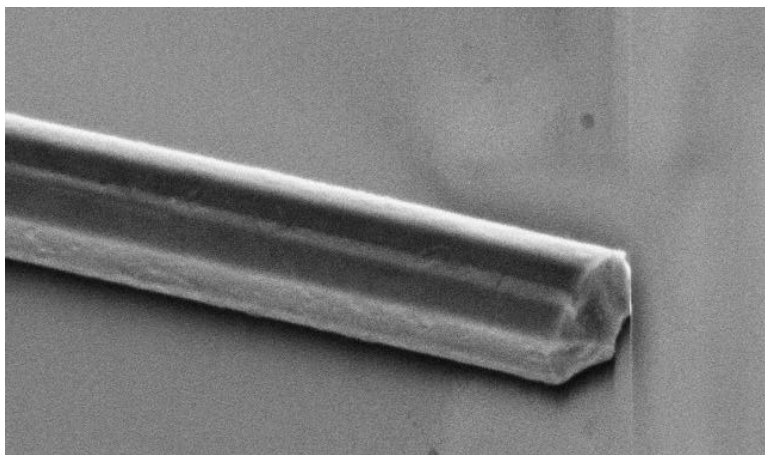
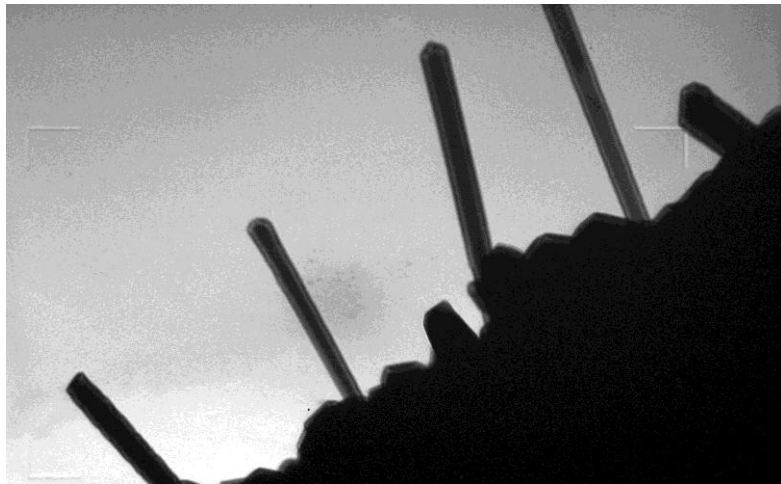
Figure 2 | General behaviour observed in the topological Josephson junction. **a**, A map of the differential resistance across the junction, measured with the top gate at $V_G = 1.05$ V, shows the single-slit interference characteristic of a uniform supercurrent density. **b**, The supercurrent density, extracted for $V_G = 1.05$ V, is consistent with trivial charge transport throughout the bulk of the junction. **c**, When the top-gate voltage is lowered to $V_G = -0.425$ V, the differential resistance shows a more sinusoidal interference pattern. **d**, Using the interference envelope measured at $V_G = -0.425$ V, the supercurrent density is clearly dominated by the contribution from the edges. In this regime almost no supercurrent passes through the bulk.

Our samples: (3D!) Monocrystalline Bismuth nanowires

(A. Kasumov)

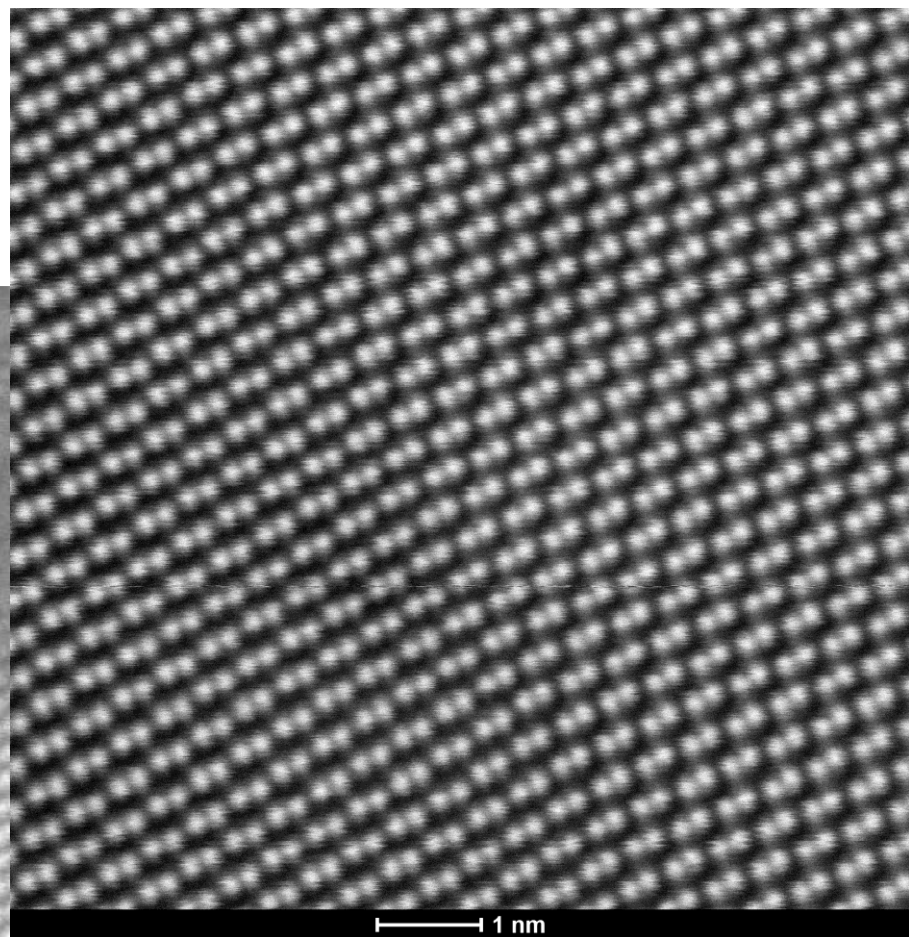
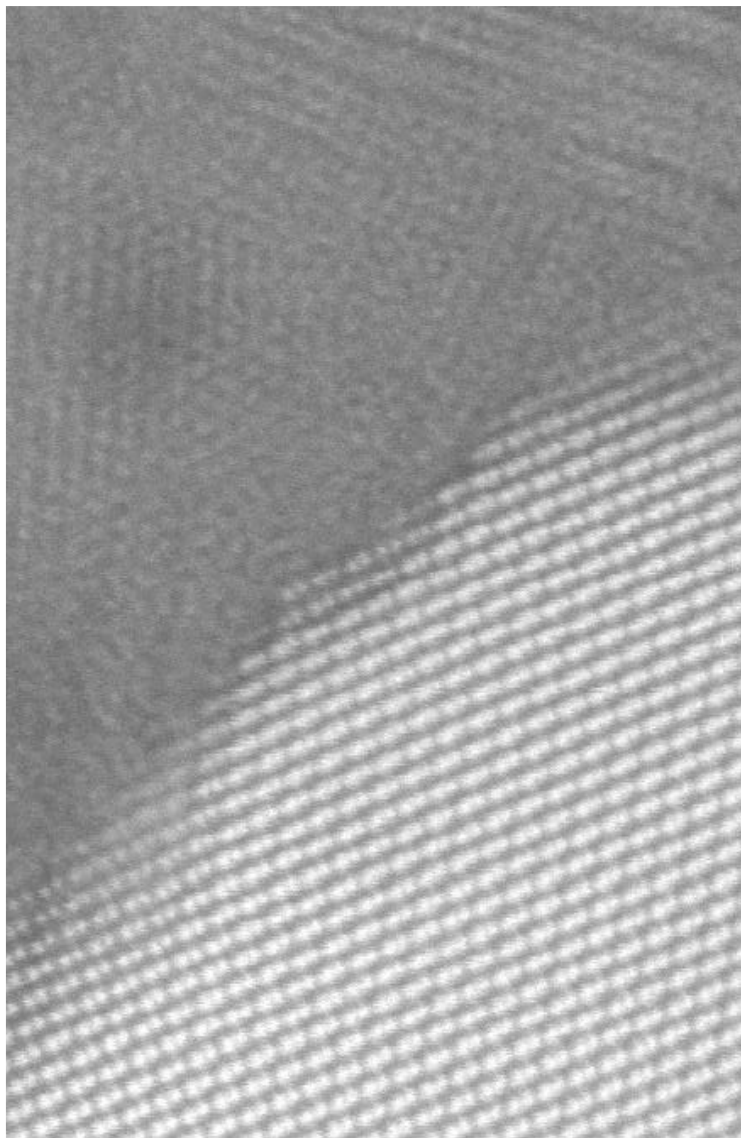
High resolution TEM

G. Patriarche, N. Findling, C2N Saclay)



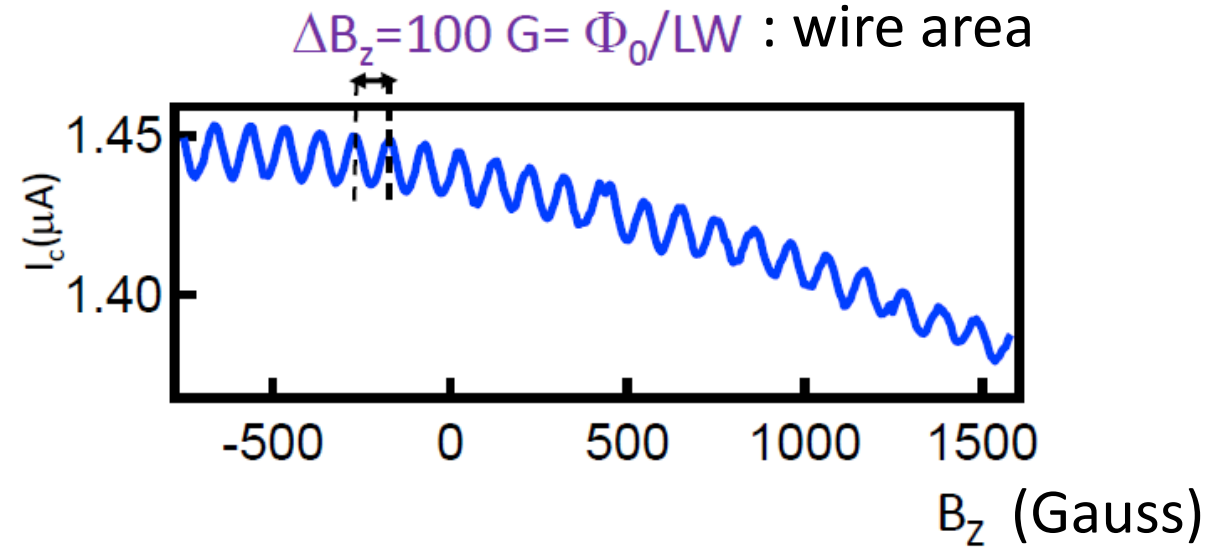
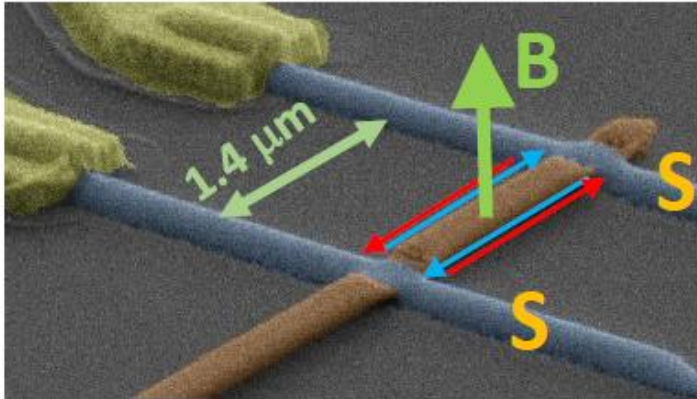
Diameter ~ 100 nm

High quality monocrystals



1 nm

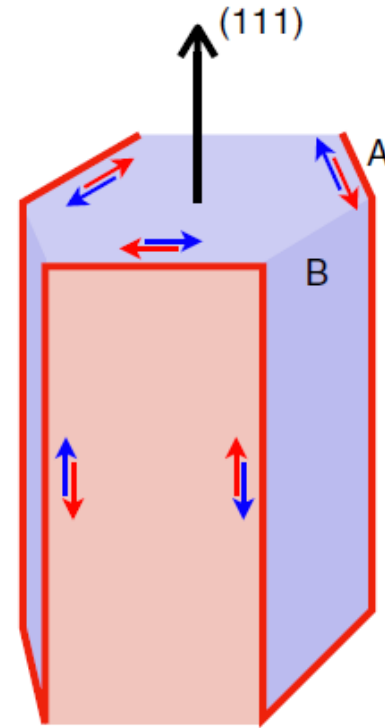
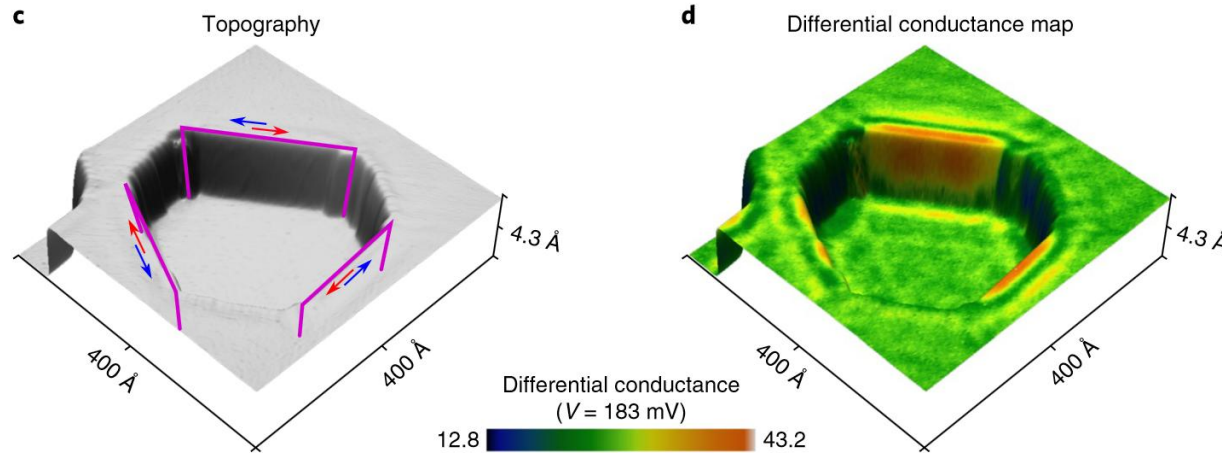
Surprises in first experiments of bismuth nanowires with S contacts



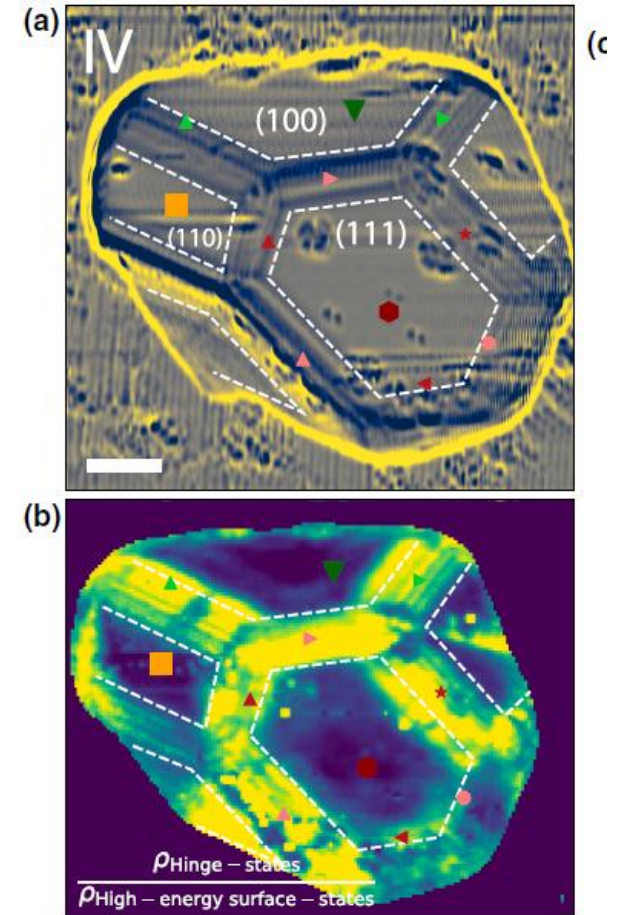
- SQUID-like oscillations: there must be two paths (with a hole in the middle)! -> discovery that bismuth is a SOTI
- Slow decay, persists up to Tesla fields : narrow channels (nm!)
- High critical current : well transmitted channels

Edge states were also “seen” by STM (in thin films)

Drozdo, Yazdani *et al*, Nature Phys (2014)



Zhang, H. Aubin *et al*, Phys Rev B (2023)



Beaucoup de propriétés révélées grâce à la supraconductivité de proximité

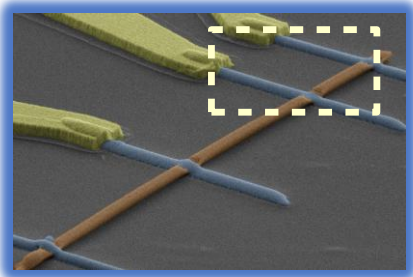
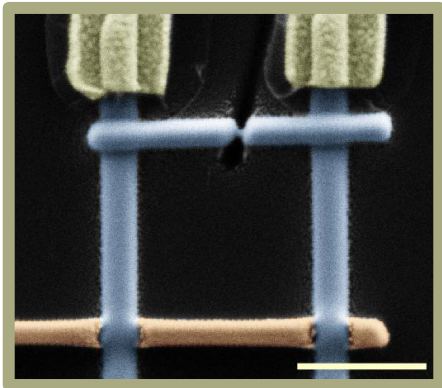


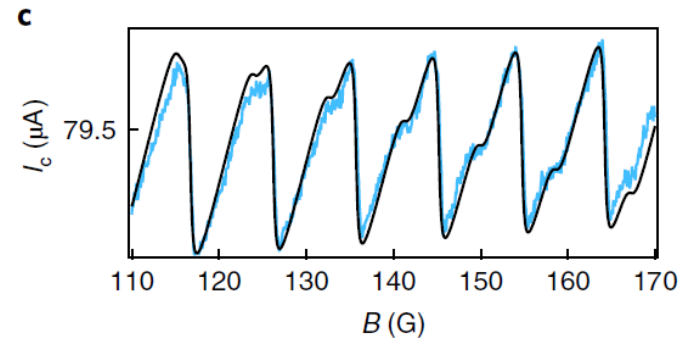
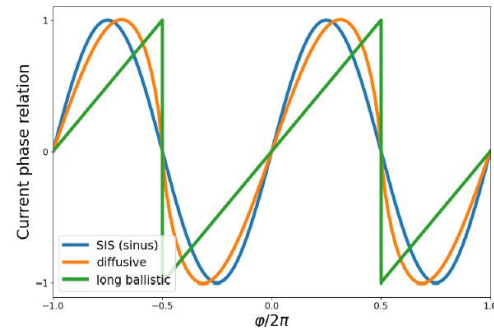
Figure d'interférence du courant critique avec le champ magnétique:
États de bord: HgTe/CdTe et Bismuth

Li 2015
Murani 2017



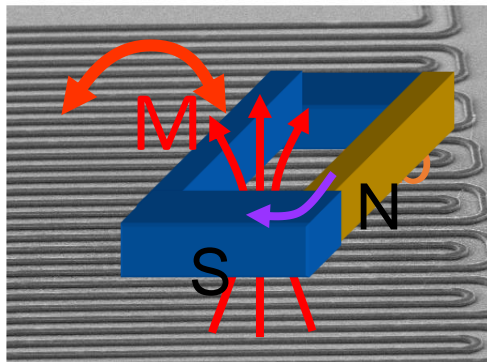
1 μm

Ce qu'on a aussi fait dans le bismuth et WTe2, deux isolants topologique 3D d'ordre 2
Montré que le transport le long de ces bords est balistique (car protection contre rétrodiffusion).
Expérience: Mesure de la relation entre le supercourant et la phase



Murani 2017
Schindler 2018
Bellu 2026

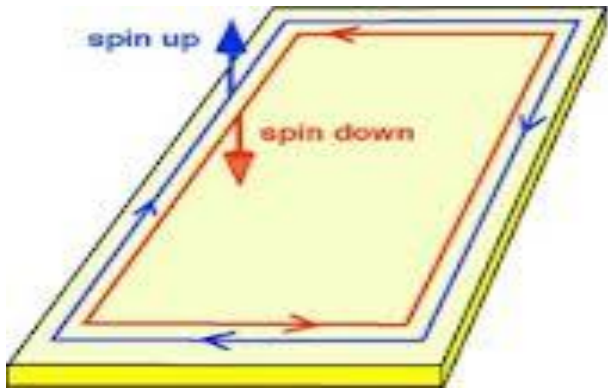
On a aussi sondé la protection topologique en mesurant la réponse linéaire à une excitation radiofréquence
Murani 2019



Les isolants topologiques Z2 existent aussi à 3D!

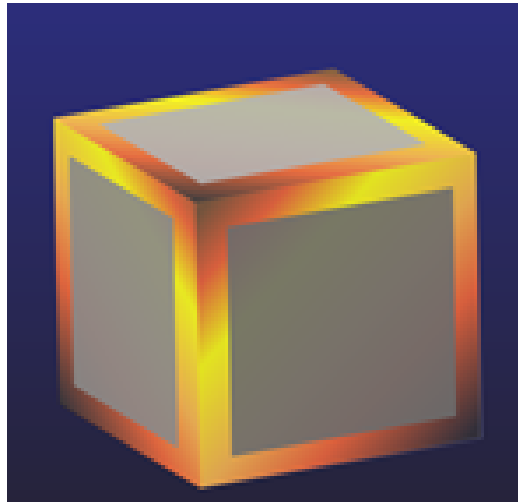
Ce qu'on a vu jusqu'ici:
États hélicaux (=Quantum Spin Hall) 1D dans :

Isolants topologiques
2D (d'ordre 1)



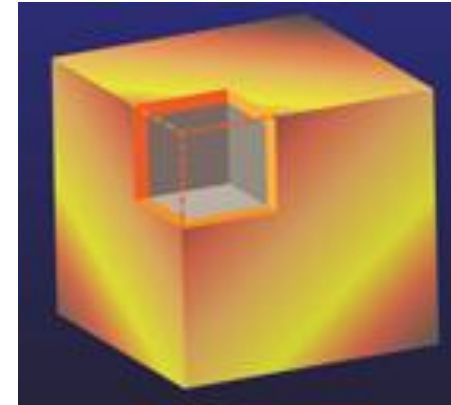
Puits quantiques
HgTe/CdTe
Monocouche de WTe₂

Isolants topologiques
3D d'ordre 2.



Bismuth
Multicouche de WTe₂
Bi₄Br₄ (nouveau!)

Il existe aussi des isolants
topologiques 3D d'ordre 1:
Isolants dans coeur,
conducteurs aux surface

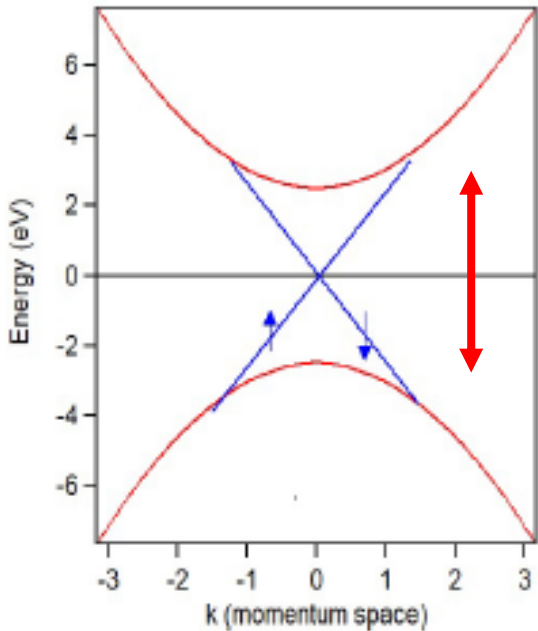
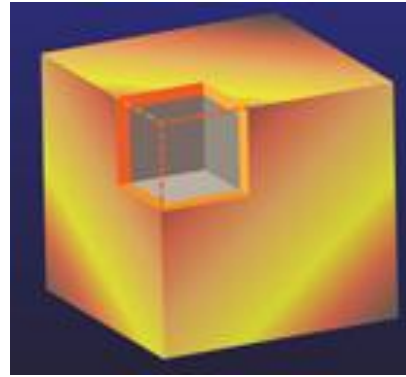
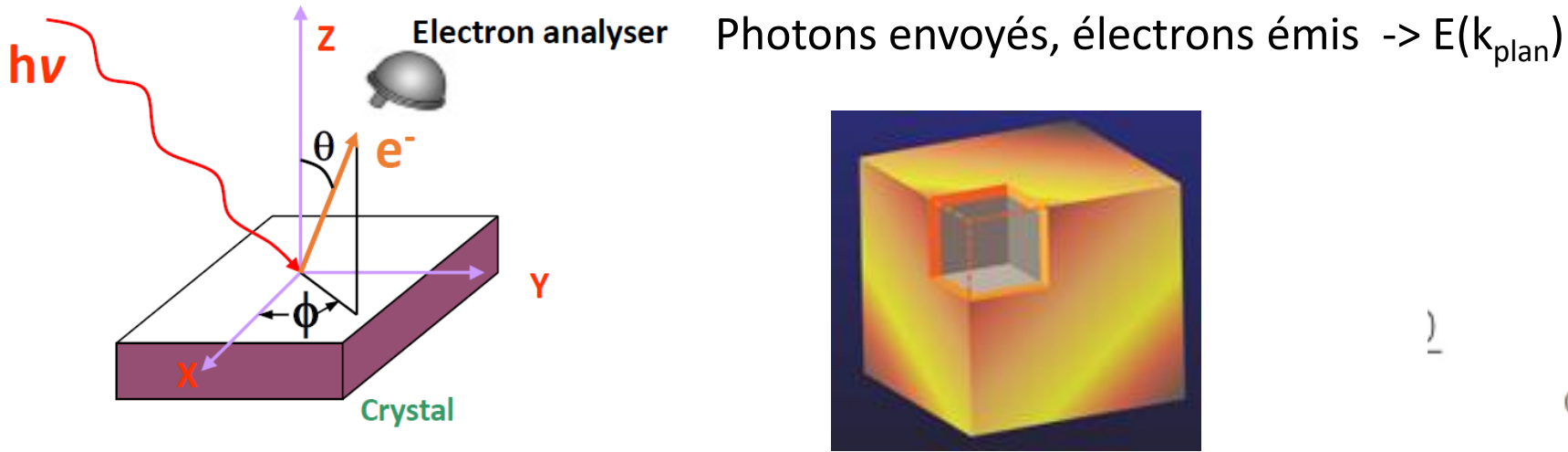


Comment détecter ces états de surface?

Transport? Non!

Photoémission permet de sonder à la fois
la surface et (un peu du) cœur des
matériaux

Photoémission résolue en angle d' isolants topologique 3D



On s'attend à:

Isolant dans le cœur :

gap entre bande de valence et bande de conduction

Conducteur sur surface:

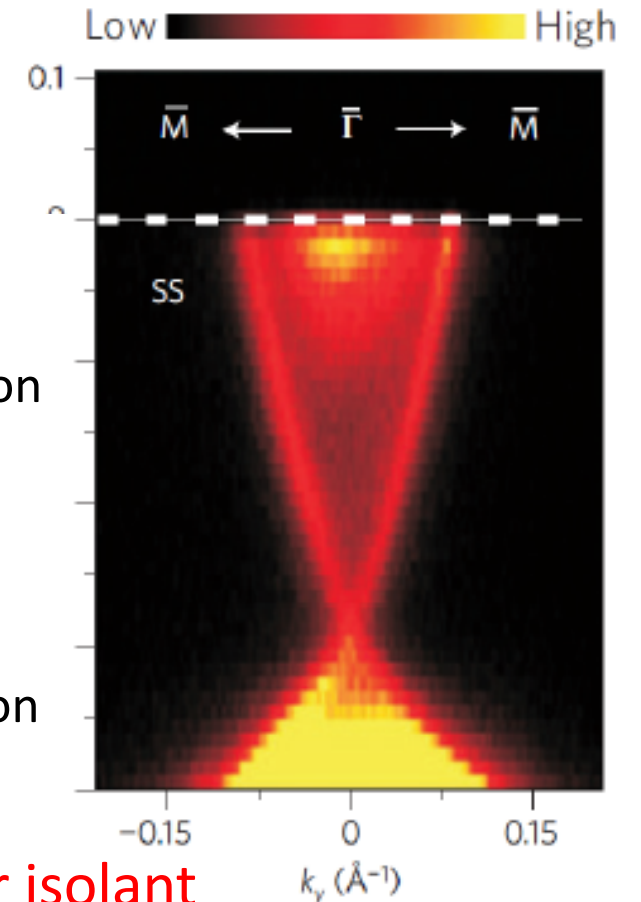
A l'intérieur de « bande interdite » du cœur, les

états de conduction de la surface: $E(k)$ lineaire:

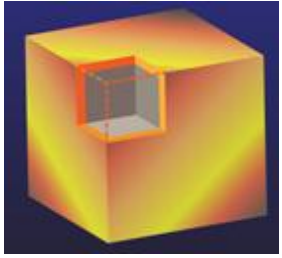
cônes.

De plus, corrélation entre direction de k et direction du spin (« spin-momentum locking ») à cause du fort spin-orbite

Etats conducteurs en surface, cœur isolant

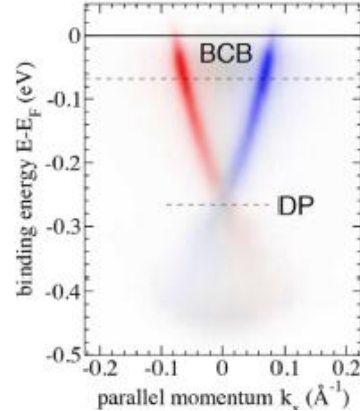
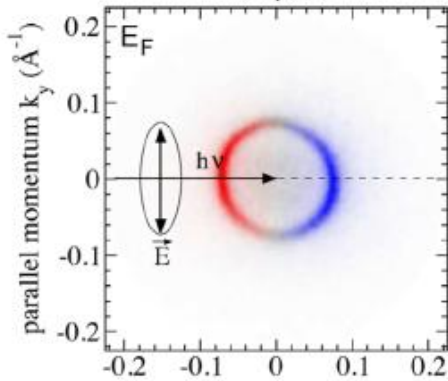
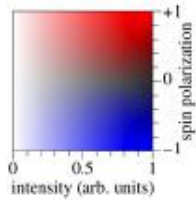


Texture de spin de la surface d'un isolant topologique 3D



Lumière polarisée \rightarrow intensité dépend du spin électronique

Exemple Bi_2Se_3 , pour une polarisation de lumière



Texture reconstituée

Texture dans le plan (k_x, k_y)

Texture sur cône $E(k_x)$



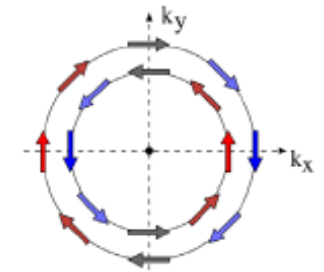
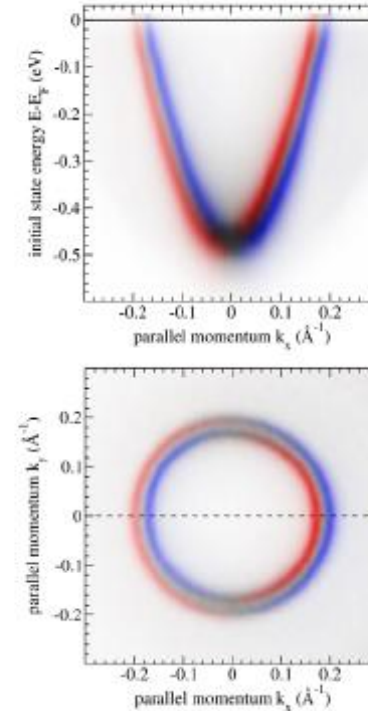
Surface d'un isolant topologique 3D (Bi_2Se_3):

Une seule bande (cône), avec une **texture de spin** (à cause du spin-orbite fort).

La texture de spin opposée se trouve sur la surface opposée!

Comparaison à Photoémission résolue en spin d'une surface d'or (111): Non topologique, mais interaction spin-orbite

Sanchez-Barriga et al

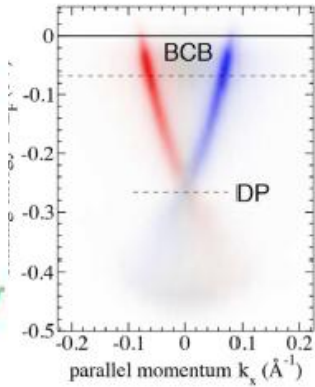
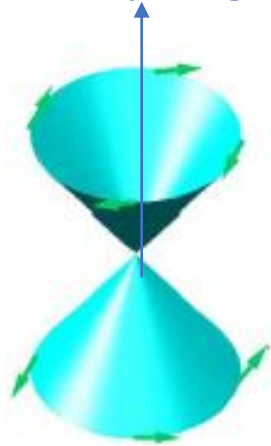
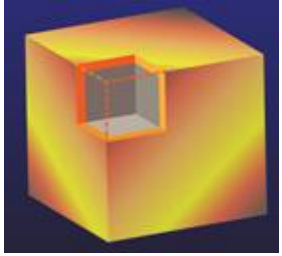


Texture de spin similaire (aussi spin-momentum locking).

Deux bandes (paraboliques) splittées en spin

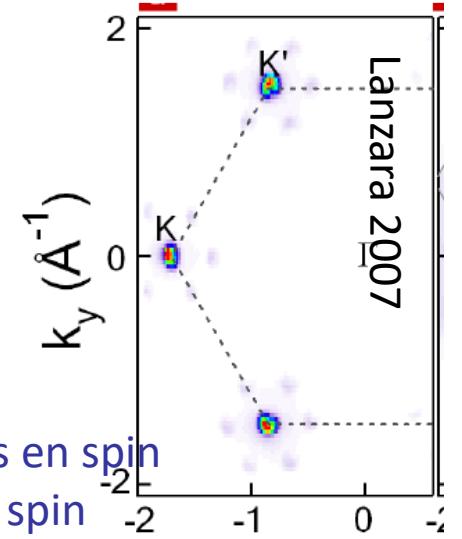
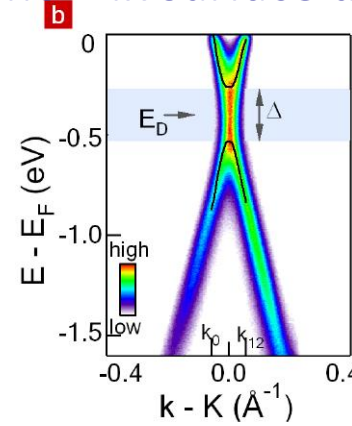
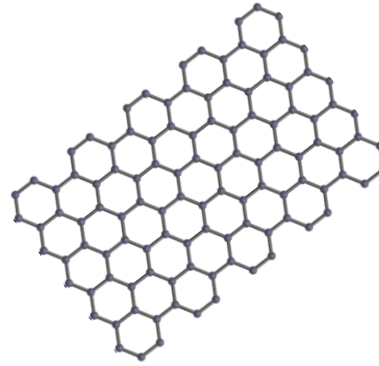
De la surface d'un isolant topologique à un objet marginalement topologique: le graphène

Surface d'un isolant topologique 3D



un seul cône en Γ , avec texture de spin

Monocouche de graphène = 4x surface d'un IT3D x4!



Deux cônes en K et K' (deux vallées), dégénérés en spin
Pas de texture de spin, mais texture de pseudo spin

Graphène: trivial?

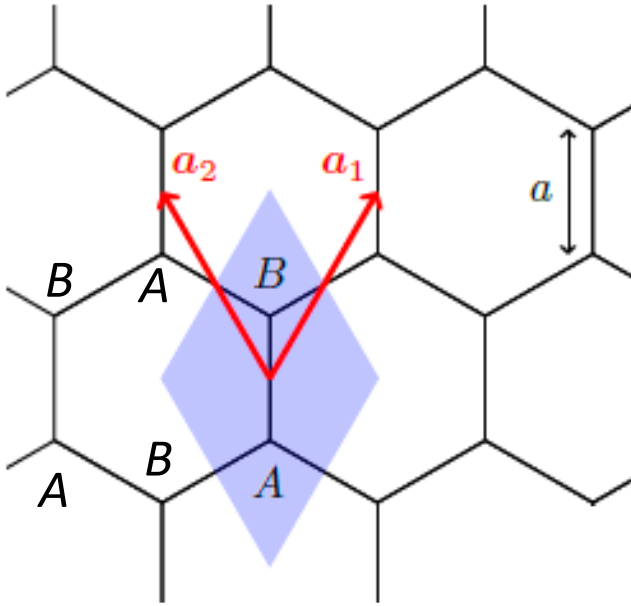
- Symétrie de renversement du sens du temps -> **Chern=0**
- Deux bandes se touchent: pas d'inversion! (spin-orbite insuffisant) : **pas de topologie Z2, pas d'états hélicaux**

Et pourtant:

- Modèles pour systèmes topologiques (isolants de Chern et isolant topologique Z2)
- Structure en vortex de la fonction d'onde autour de chaque point de Dirac!
- > Courbure de Berry = **Moment magnétique orbital intrinsèque** porté par les électrons de cette vallée! (Nul quand on somme sur les deux vallées.)
- > Etats de Landau différents: **réponse magnétique orbitale extraordinaire** que nous avons mesurée!
- Plus récemment, combinaisons de graphène (bicouches « twistées », multicouches rhomboédrales) -> bandes plates -> **isolants de Chern !**

Energies et vecteurs propres du graphène

2 atomes (A et B) par maille



$$|\psi_{\mathbf{q}}\rangle = \sum_j e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_j} (\alpha_{\mathbf{q}}|A_j\rangle + \beta_{\mathbf{q}}|B_j\rangle)$$

$$|u_{\mathbf{q}}\rangle \equiv \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{q}} \\ \beta_{\mathbf{q}} \end{pmatrix}$$

$u_{\mathbf{q}}$: (pseudo) spin 1/2 sur la base des deux sous-réseaux A_j, B_j

$$\hat{H}_{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} E_A & -J(1 + e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}_1} + e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}_2}) \\ -J(1 + e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}_1} + e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}_2}) & E_B \end{pmatrix}$$

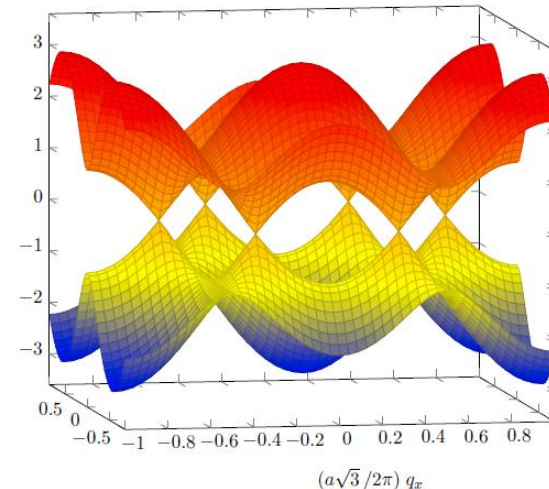
$$\hat{H}_{\mathbf{q}} = -\mathbf{h}(\mathbf{q}) \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}},$$

Hamiltonien d'un spin 1/2 dans un champ magnétique extérieur!

Valeurs propres

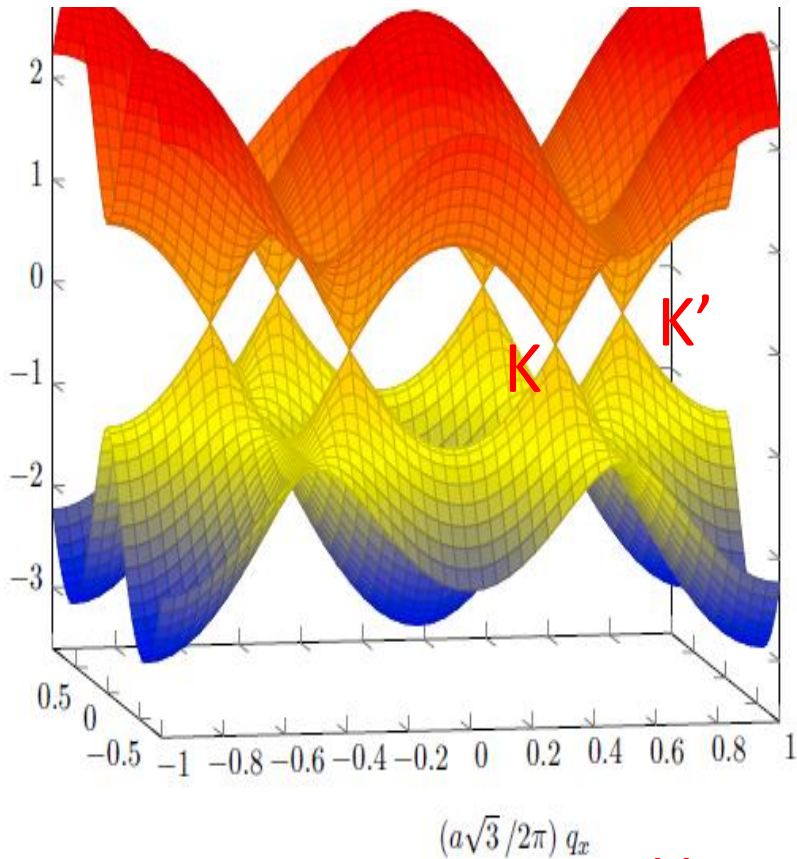
$$E_{\mathbf{q}}^{(\pm)} = \pm |\mathbf{h}(\mathbf{q})| = \pm J |1 + e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}_1} + e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}_2}|$$

Structure de bande = 6 cônes près de $E=0$



Structure des vecteurs propres?

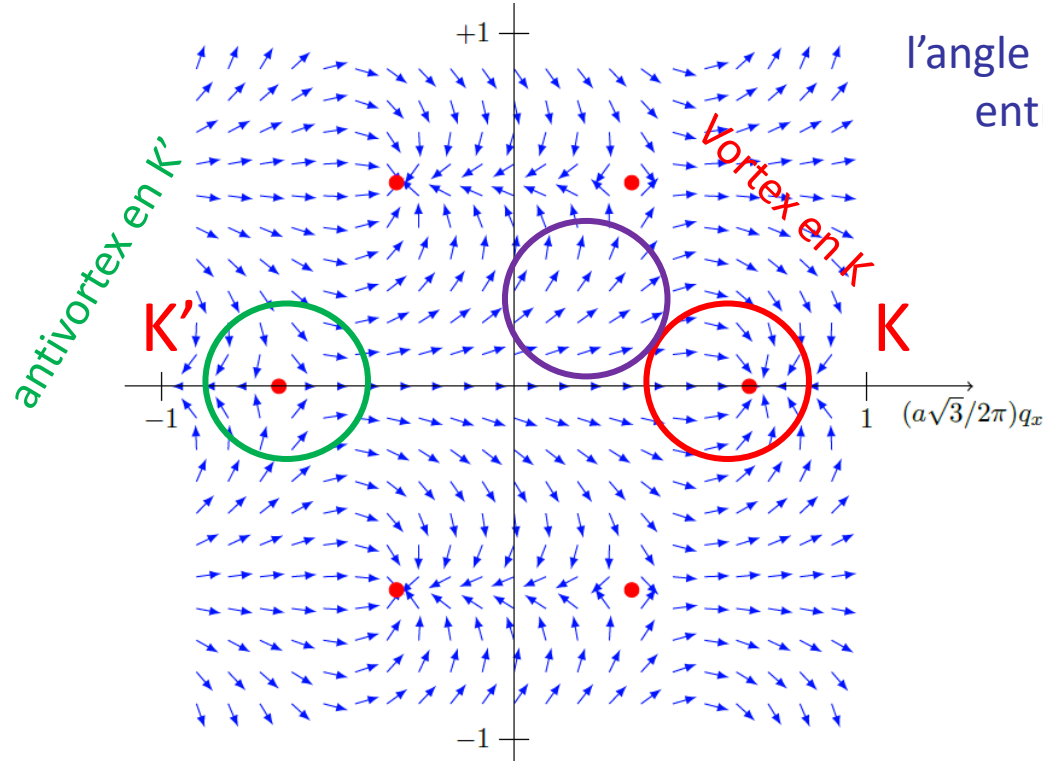
Structure de bande du graphène =
6 cônes près du demi remplissage
(6 point de Dirac), 2 inéquivalents



$$\hat{H}_q = -\mathbf{h}(q) \cdot \hat{\sigma},$$

$$\mathbf{h}(q) = \begin{pmatrix} 1 + \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_1) + \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_2) \\ \sin(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_1) + \sin(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}_2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Champ des vecteurs \mathbf{h} dans le plan (q_x, q_y) :



l'angle des \mathbf{h} indique aussi la phase
entre les deux sous-réseaux

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \arg(k_x + ik_y)$$

$$|u_-(\mathbf{k})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{i\varphi_{\mathbf{k}}} \end{pmatrix}$$

$$|u_+(\mathbf{k})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\varphi_{\mathbf{k}}} \end{pmatrix},$$

Vortex de signes opposés aux points K et K'

Torsion de la phase autour des points K et K' et pas ailleurs!

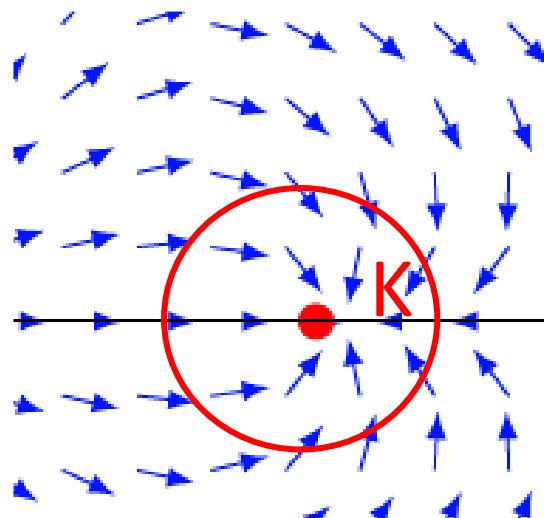
Conséquences sur les niveaux de Landau et le magnétisme orbital du graphène.

Trajectoire de la fonction d'onde autour des points K et K' acquiert une phase de Berry de π -> niveaux de Landau spéciaux...

Structure de bande E(k)



Vortex de fonction d'onde: intégrale autour du contour donne phase de Berry= π



Niveaux de Landau donnés par une condition qui inclut la phase de Berry accumulée le long d'une trajectoire fermée

Landau levels of graphene:

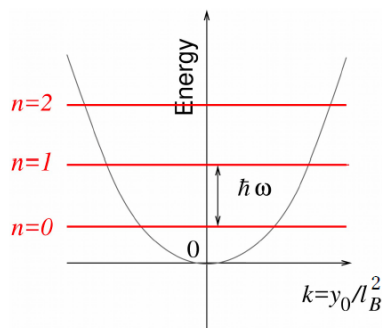
$$\epsilon_{\lambda,n} = \lambda \hbar \frac{v}{l_B} \sqrt{2n}$$

M.O. Goerbig: "weird offset" $\gamma = 0$

En comparaison, phase de Berry accumulée =0 dans les gaz 2D conventionnels (non Dirac, sans torsion dans la fonction d'onde).
 -> Pas de niveau de Landau à E=0

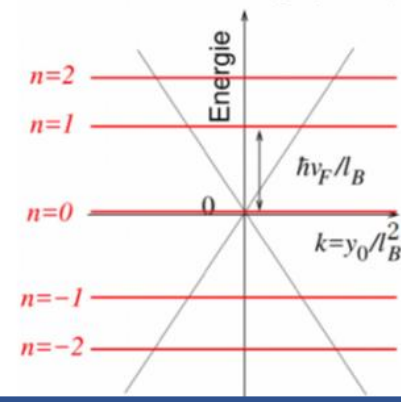
$$\epsilon_n = \hbar \omega (n + 1/2)$$

"weird" offset $\gamma = 1/2$



« weird offset »
 produit un niveau de Landau à E=0

relativistic electrons (graphene)



Conséquence: Divergence de la susceptibilité magnétique orbitale du graphène, prédite en 1956 et détectée à Orsay en 2021!

Magnétisme orbital d'un gaz 2D d'électrons quasi-libres (T=0)

$B = 0$

$E = \hbar^2 k^2 / 2m$

Bande parabolique

$B \neq 0$ niveaux de Landau

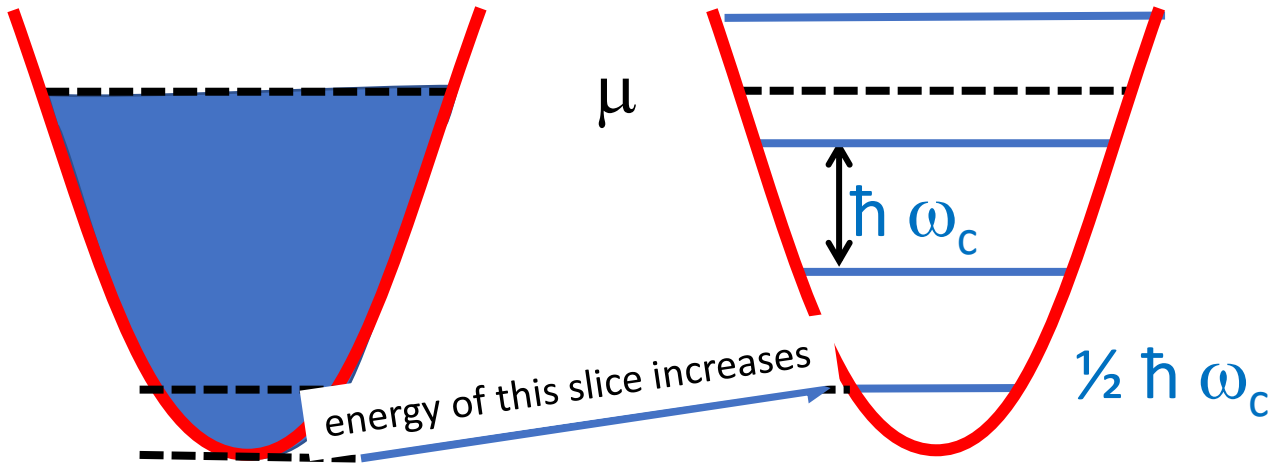
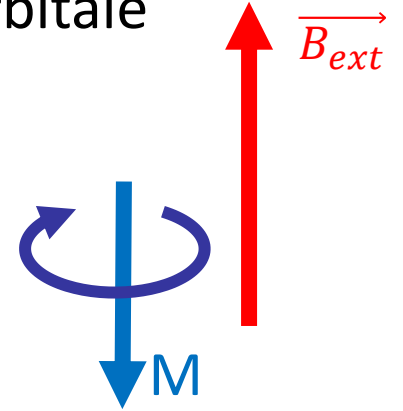
$\epsilon_n = (n+1/2) \hbar \omega_c$

$\omega_c = eB/m$

dégénérescence $g = eB/\hbar$

susceptibilité orbitale

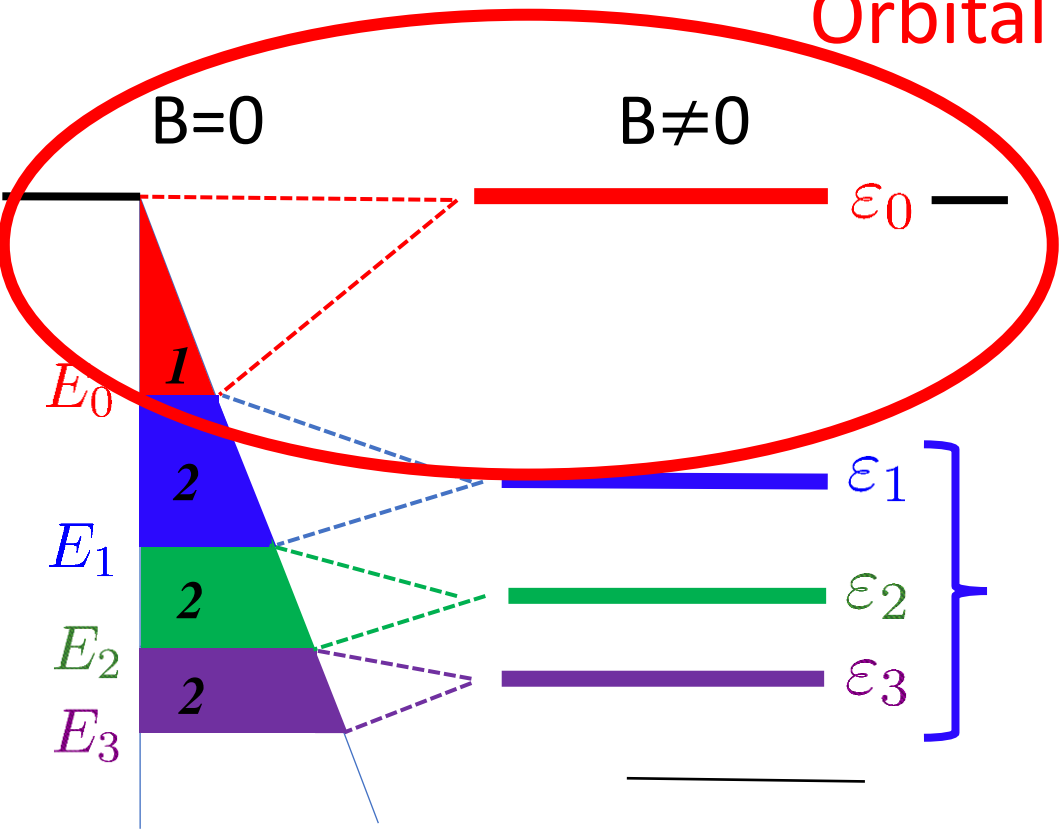
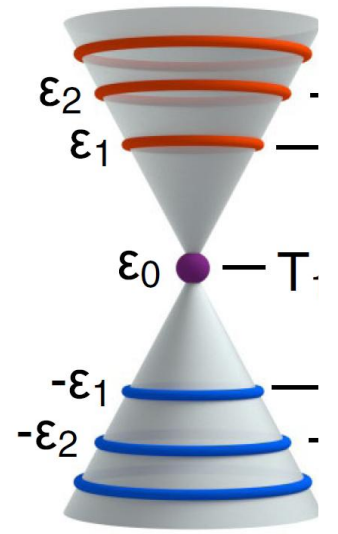
$M = \chi B_{ext}$



- $\chi_L = - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial B^2} = -e^2 / 24\pi m$
Landau diamagnetism!
- $\chi_L = -1/3 \chi_{spin\ Pauli}$

D'habitude paramagnétisme de spin > diamagnétisme orbital

Orbital magnetism of Graphene



Landau levels $\epsilon_n = -\sqrt{|n|} \epsilon_B$

There's a Landau level at E=0 because of the Berry phase!!

$\epsilon_B = \sqrt{2e\hbar v_F^2 B}$ degeneracy $D=eB/\hbar$

Does energy increase or decrease with B?

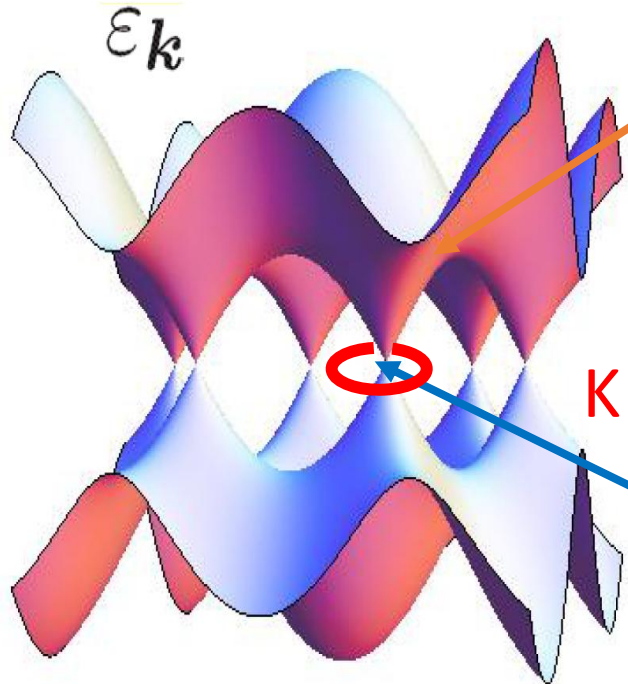
Continuum

States from the B=0 spectrum coalesce into Landau Levels:
 Energy of first slab increases: **diamagnetic !**
 (other slab have smaller paramagnetic contributions)

McClure 1956
 Raoux, Fuchs, Piechon, Montambaux 2014

$\chi \propto -1/\sqrt{B}$
 χ diamagnetic at E=0, at Dirac point
 χ diverges at B=0 ! yet no carriers at the Dirac point!

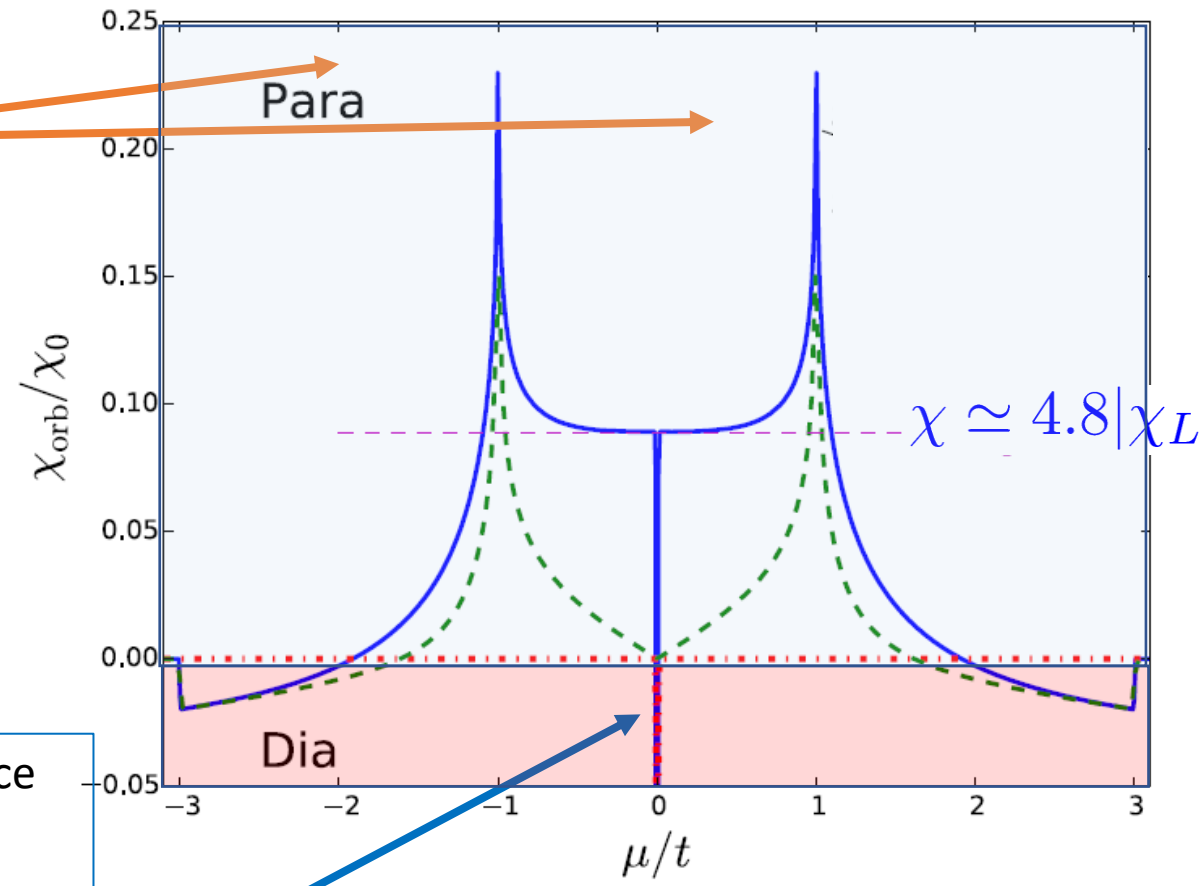
Orbital magnetism of graphene as a function of doping



Paramagnetic divergence at band saddle point (more about that later)

McClure diamagnetic divergence at Dirac point.

$$\chi_0(\mu) = \frac{\partial M}{\partial B} = -\frac{2e^2 v_F^2}{3\pi} \delta(\mu)$$



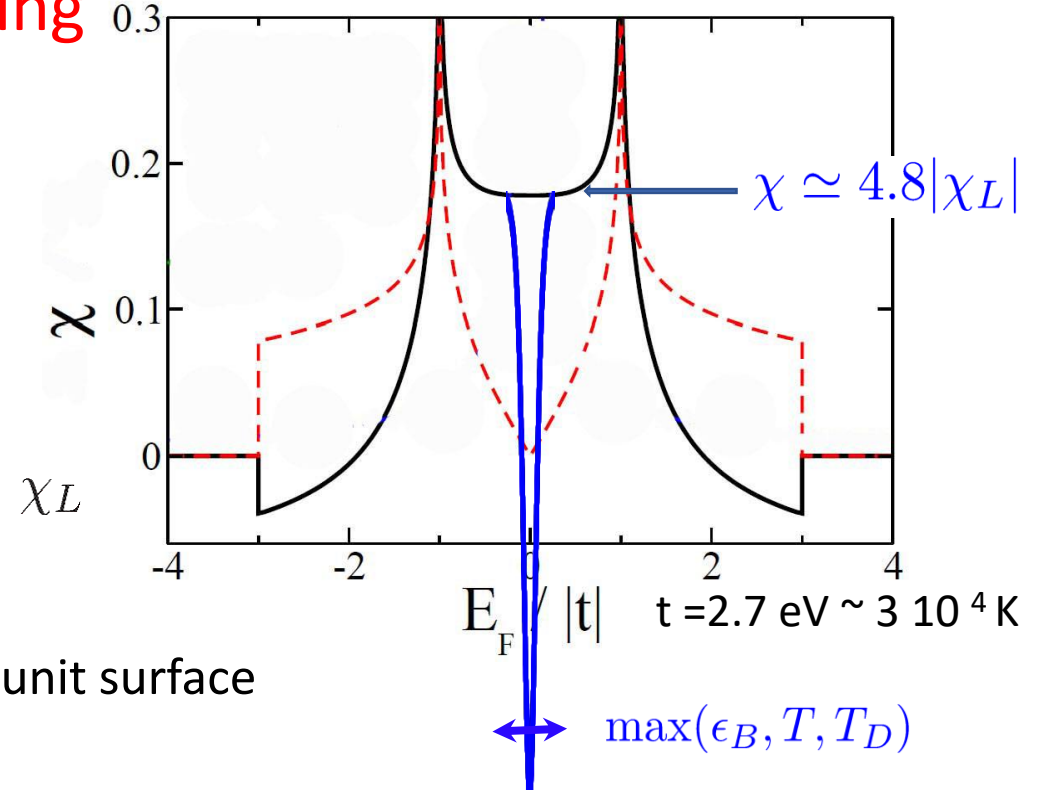
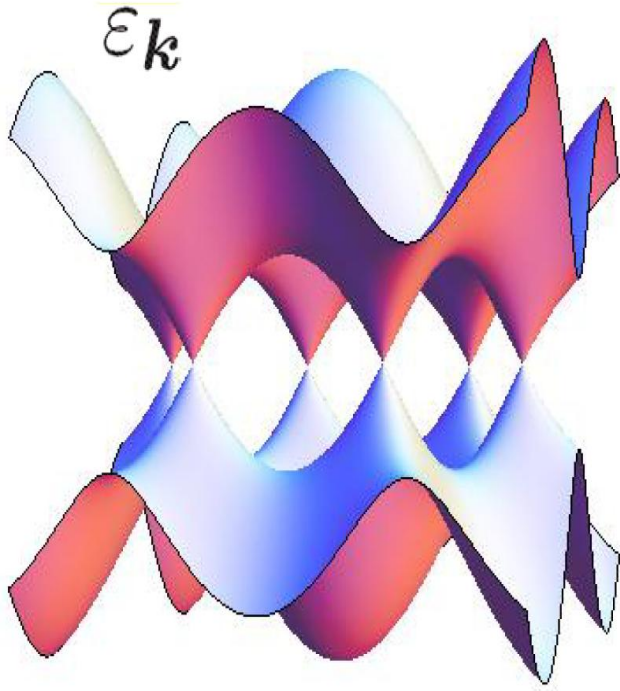
Raoux, Fuchs, Piechon, Montambaux PRL 2014

$t = 2.7 \text{ eV} \sim 3 \cdot 10^4 \text{ K}$

Is the McClure divergence (at zero doping) observable in real life?

Is the divergent diamagnetism measurable?

Experimental broadening



$$\chi_{2D,B} = \frac{\partial M}{\partial B} \cong \mu A/T \text{ per unit surface}$$

How much does graphene screen?

Screening on a micron size detector

$$\frac{\delta B}{B} = \frac{M}{H} = \chi_{3D,H} = \frac{\chi_{2D,H}}{\text{sensor size}} \cong 10^{-6} \text{ per unit volume (Very small!)}$$

Comment mesurer cette réponse magnétique?

Comment détecter le diamagnétisme orbital divergent du graphène à l'énergie des points de Dirac

Diamagnétisme du graphite



Diamagnétisme du graphène (peut-on voir léviter une couche atomique de carbone)

Problèmes évidents: comment le voir.

Détecter une réponse qui n'est qu'une fraction du champ appliqué

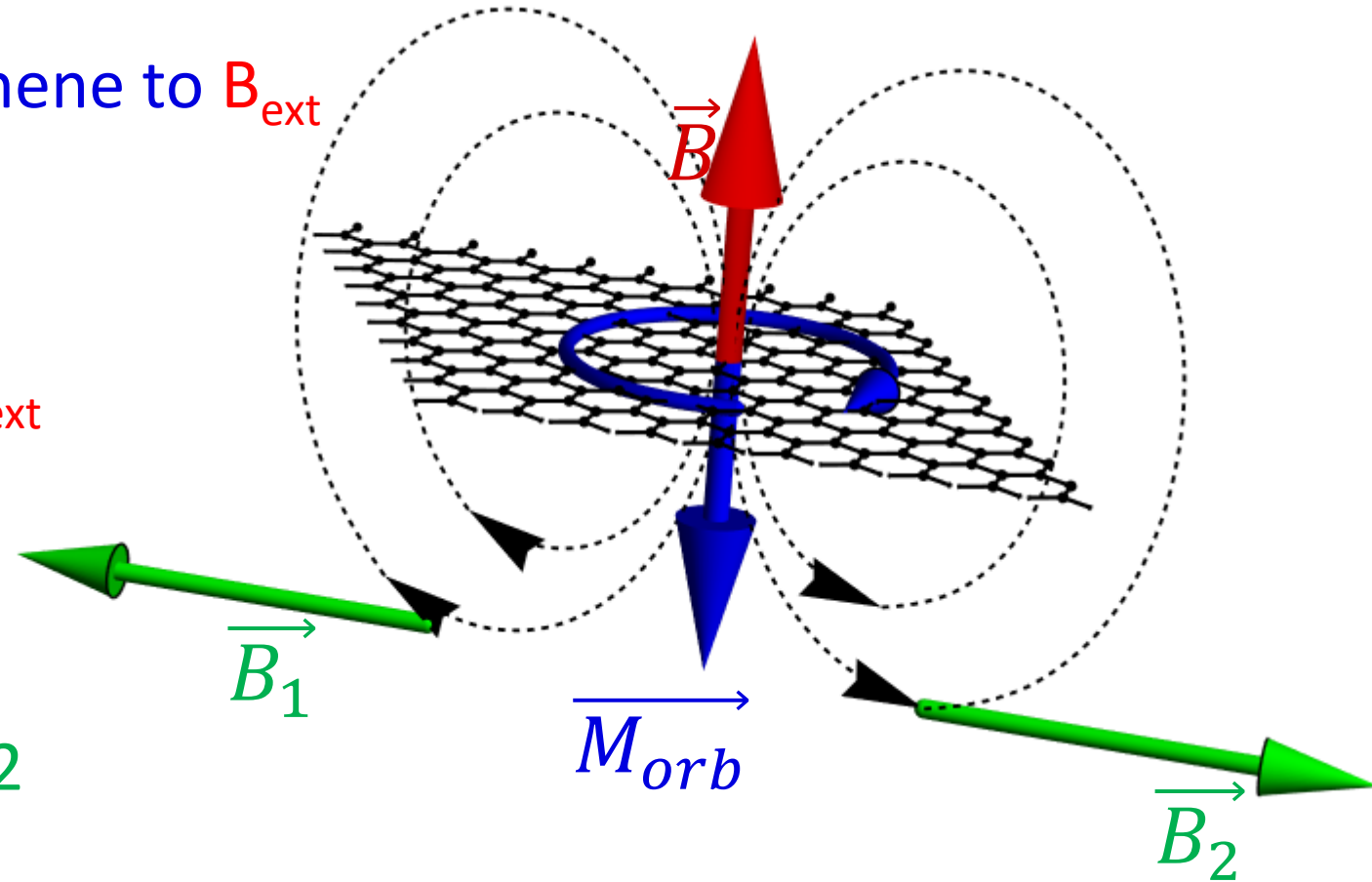
How to detect such a small diamagnetic response (screening field)

Vertical applied magnetic field B_{ext}

M_{orb} : diamagnetic response of graphene to B_{ext}

How to detect $\frac{\delta B}{B_{ext}} = 10^{-6}$?

Use detector that is insensitive to B_{ext}

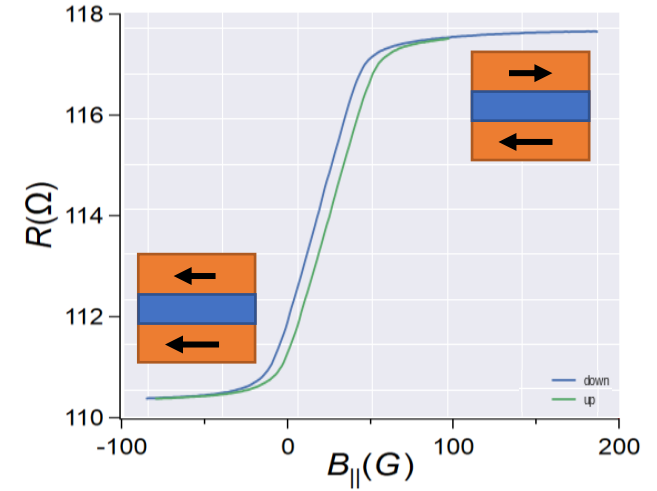
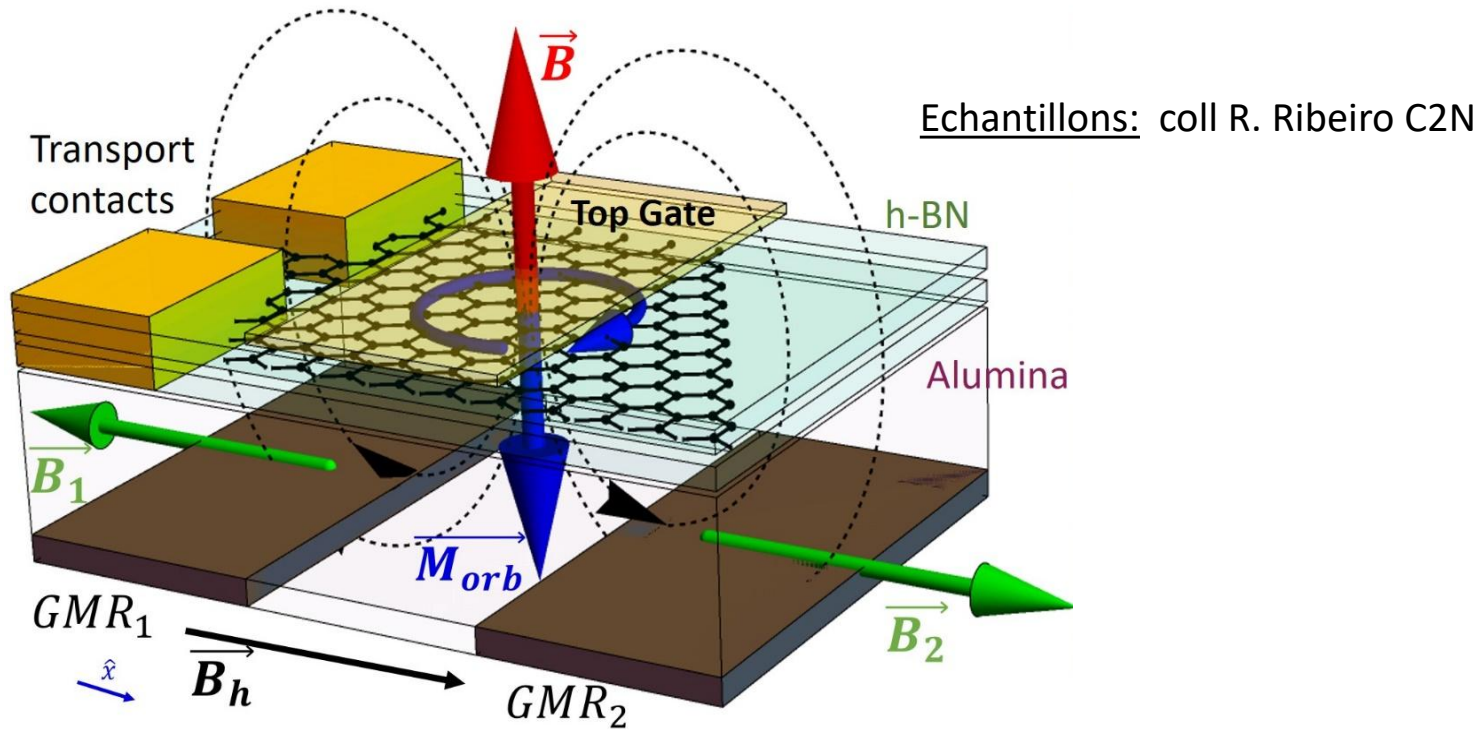


Measure in-plane fringe fields B_1 , B_2
on an appropriate detector

(Hélène Bouchiat relentless in searching for the right detector!)

Appropriate detector: Giant Magnetoresistance sensors

- GMRs probes sensitive to in-plane field only (coll. C. Fermon et M Pannetier, CEA Saclay)



Sensitivity: 0.3 Ω /Gauss
 sense 0.1 nT in vertical field of 0.1 T

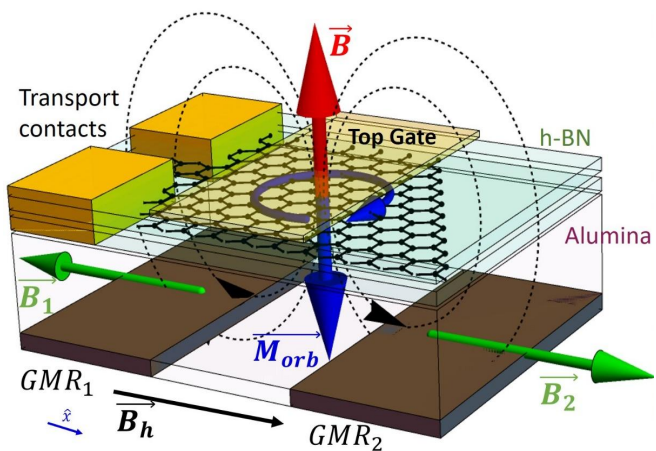
$B_{1,2}$: fringe fields at detectors, generated by M_{orb}

+ experimental tricks

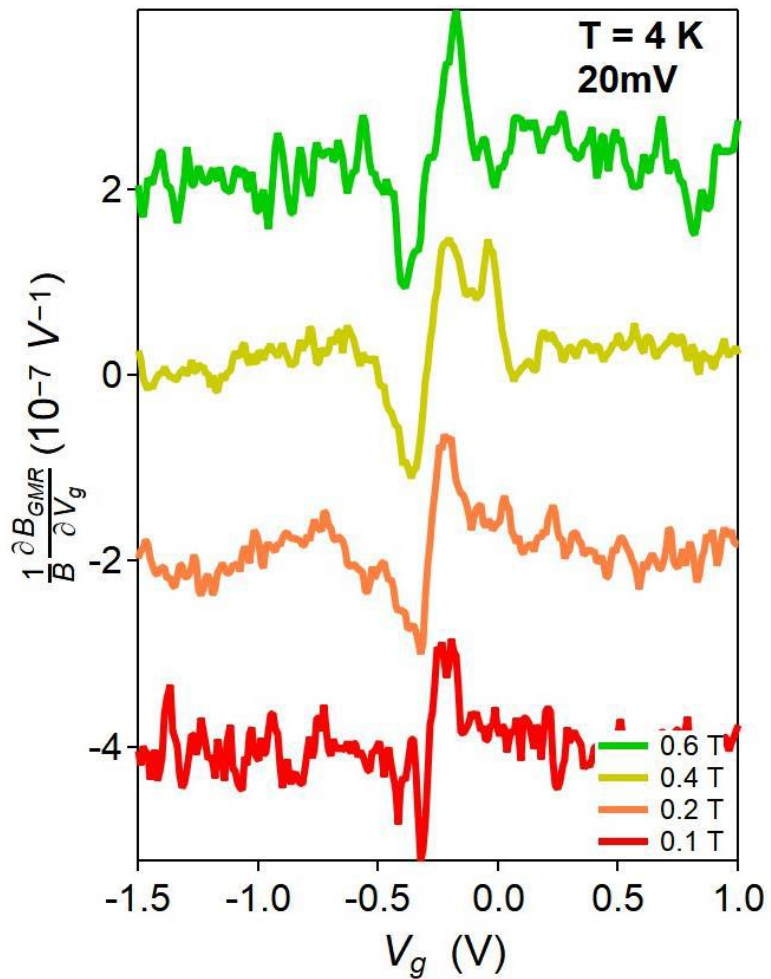
- GMRs in Wheatstone bridge configurations
- Use V_g ac modulation!

$$\frac{\delta R(GMR_1) - \delta R(GMR_2)}{\delta V_g} \propto \frac{\delta M_{orb}}{\delta V_g}$$

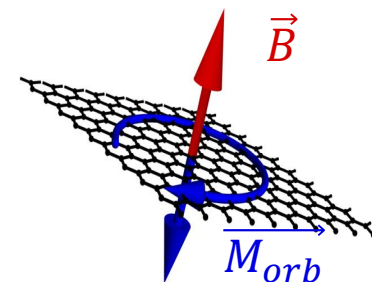
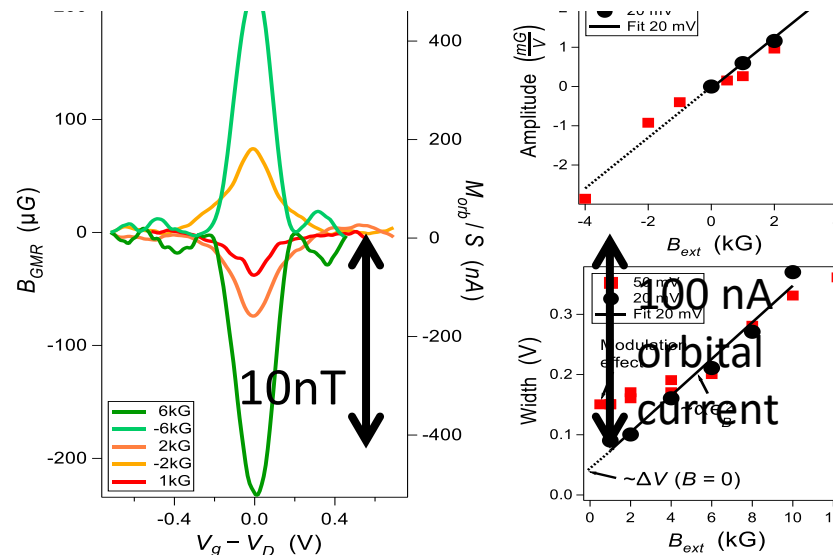
Measured signal : $\frac{1}{B} \frac{\partial B_{GMR}}{\partial V_g} \propto \frac{\delta M_{orb}}{\delta V_g}$



$$\frac{\delta R(GMR_1) - \delta R(GMR_2)}{\delta V_g} \propto \frac{\delta M_{orb}}{\delta V_g}$$



Integrated signal $\propto \delta M_{orb}$



Théoriciens:

JN Fuchs, F. Piéchon, G. Montambaux, LPS Orsay

Integration



Diamagnetic
McClure Peak!

1000 μ_B at 0.1T

J. Vallejo et al, Science 2021

Conclusion et projets sur magnétisme orbital

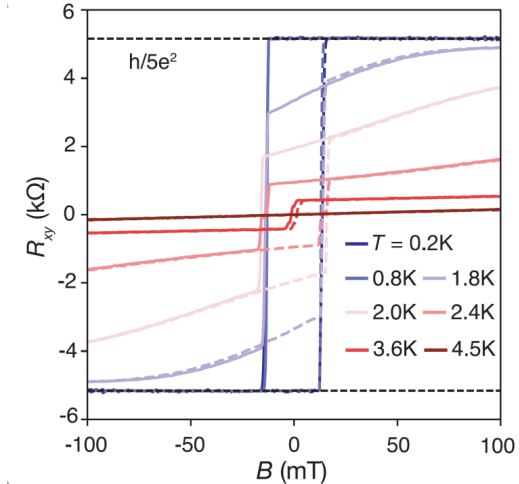
Détecteur de magnétisme orbital révèle des propriétés topologiques entre autres:

- Diamagnétisme orbital du graphène au demi-remplissage
- Paramagnétisme orbital à des points selle de la structure de bande (moiré graphène/hBN)

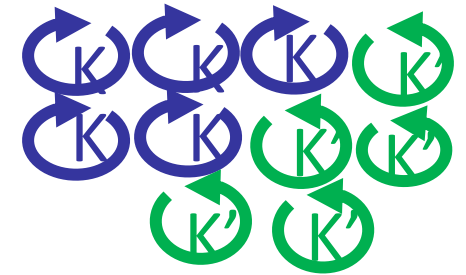
A l'avenir:

- Magnétisme orbital du bicouche de graphène
- Magnétisme orbital de phases Isolant de Chern (Quantum Anomalous Hall) réalisées récemment dans:
 - les bicouches tournées de graphène
 - le graphène rhombohédral
- Explorer supraconductivité de bandes plates dans ces systèmes

Dans ces deux cas, il s'agit d'un magnétisme orbital, dû à des courants orbitaux de vallée, nouveau magnétisme à explorer!



Long Ju Science 2024



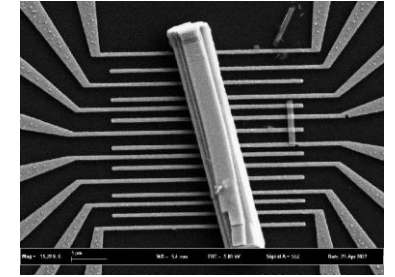
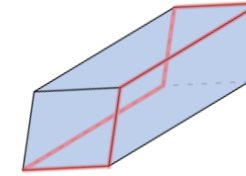
Remarque: Concurrence récente de détecteurs locaux de magnétisme orbital: « SQUID on tip ». E. Zeldov, Weissman Institute, Andrea Young (Santa Barbara), Arthur Marguerite (ESPCI Paris).

Conclusion et projets sur isolants topologiques

D'autres matériaux avec états hélicaux 1D?

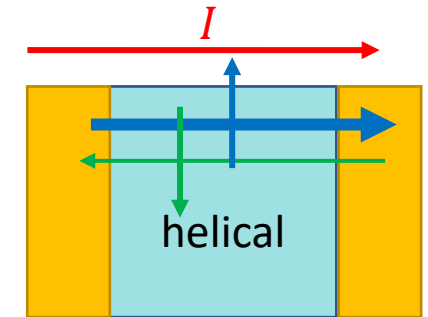
Un autre isolant topologique d'ordre 2 prometteur: le Bi_4Br_4

Gap de volume 300 meV, gap de surface 25 meV! Premières expériences de physique mésoscopique au LPS (Lefevre, Deblock et al. Phys Rev X 2026). Supraconductivité de proximité à venir...



Sonde du spin-momentum locking dans les états hélicaux: génération d'une polarisation de spin énorme par un courant (effet Edelstein).

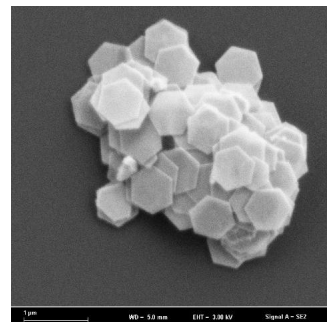
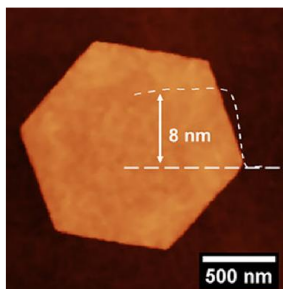
Effets bilinéaires, diode supraconductrice, Bard et al, en cours de rédaction



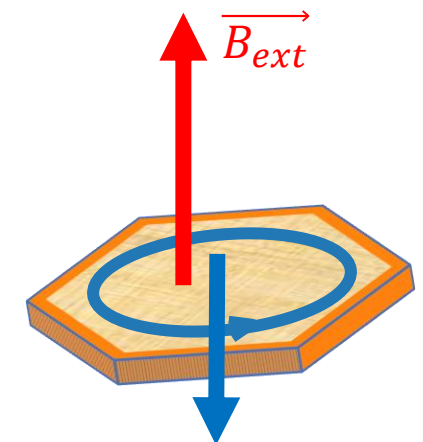
D'autres états de bords hélicaux 1D?

Quantum Valley Hall: Etats de bords 1D topologiques grâce au pseudo-spin-momentum locking (pseudo-spin de vallée) dans joint de grain artificiel de bicouche de graphène (Zhu Science 2023).

Magnétisme orbital d'un matériau avec états de bords?



Nanohexagones de bismuth presque identiques, G. Abellan, JACS 2023



Remerciements, sources

Groupe de physique mésoscopique Orsay: Hélène Bouchiat, Richard Deblock, Meydi Ferrier, Alexei Chepelianskii, Miguel Monteverde

Yan Sun, Sandrine Autier-Laurent, Raphael Weil,

Matthieu Bard, Lucas Bugaud, Robin Quinsac, Pooja Agarwal,

Xavier Ballu, Ziwei Dou, Jules Lefeuvre, Chuan Li, Anil Murani, Alexandre Bernard, Jorge Vallejo Bustamante

Raphaëlle Delagrangé

Jean-Noël Fuchs, « coach de topologie »; David Carpentier, ENS Lyon

Au LPS: Andrej Mesaros, Frédéric Piéchon, Pascal Simon, Véronique Brouet

Dominique Chandèsris et Louis Fayard pour l'invitation!

Ressources bibliographiques

Cours 2018 Collège de France Jean Dalibard (2018) : La matière topologique explorée avec des atomes et des photons

Cours 2026 Collège de France Antoine Georges (2026): <https://www.college-de-france.fr/fr/agenda/cours/de-effet-hall-quantique-aux-materiaux-moires-topologie-et-geometrie-des-materiaux-quantiques>

J. Cayssol et J.-N. Fuchs, *J. Phys. Mater.* **4** (2021) 034007; M. Fruchart et D. Carpentier, *C. R. Physique* **14** (2013), 779–815.

Notes Adolfo Grushin (site web)

Xiao Chang Niu *Rev Mod Phys* 2010

Livres Bernevig, Vanderbilt

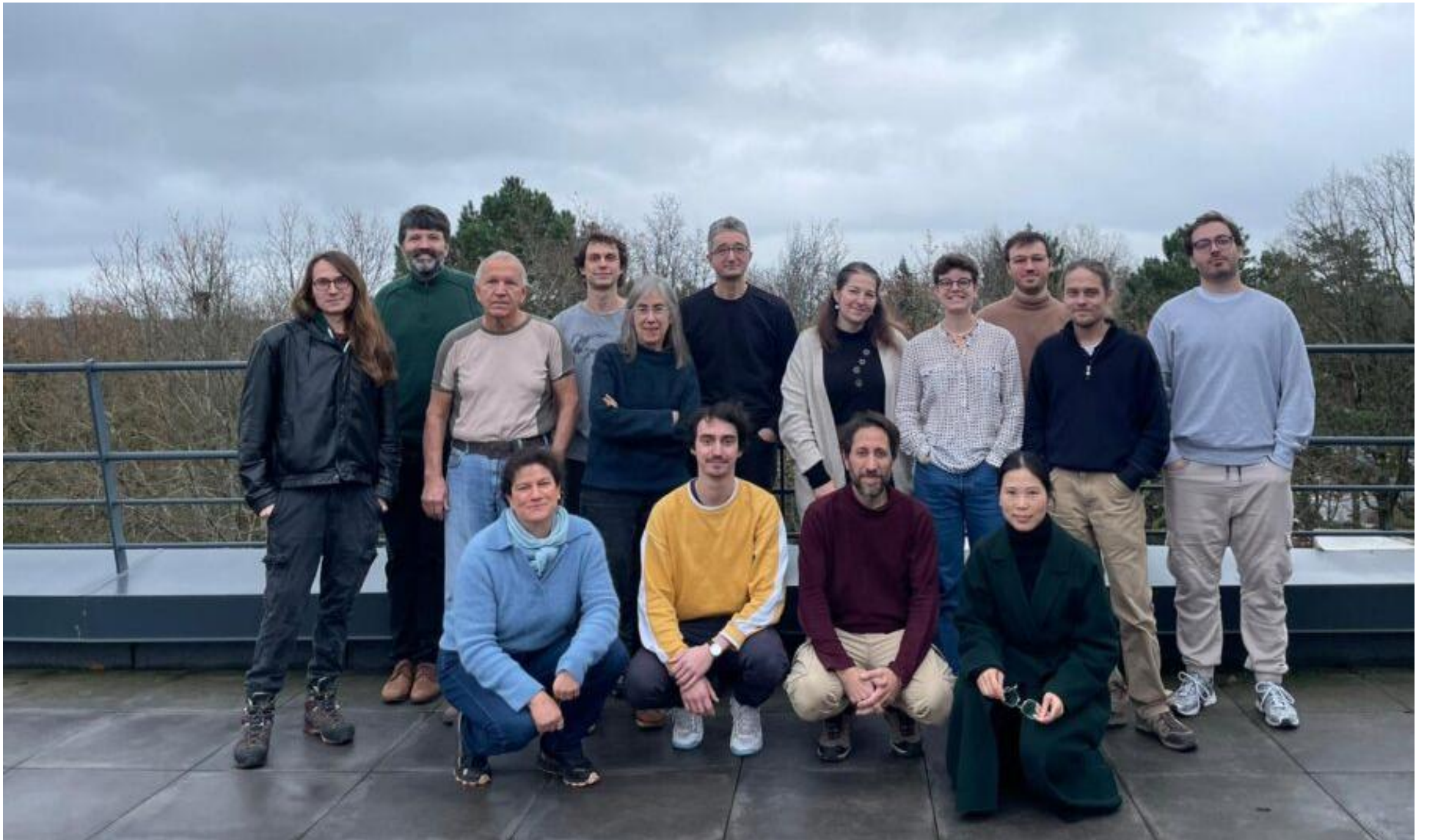
Beaucoup de sujets que je n'ai pas abordés:

Semi-métaux topologiques

Effet Hall Quantique Fractionnaire, Isolants de Chern fractionnaires

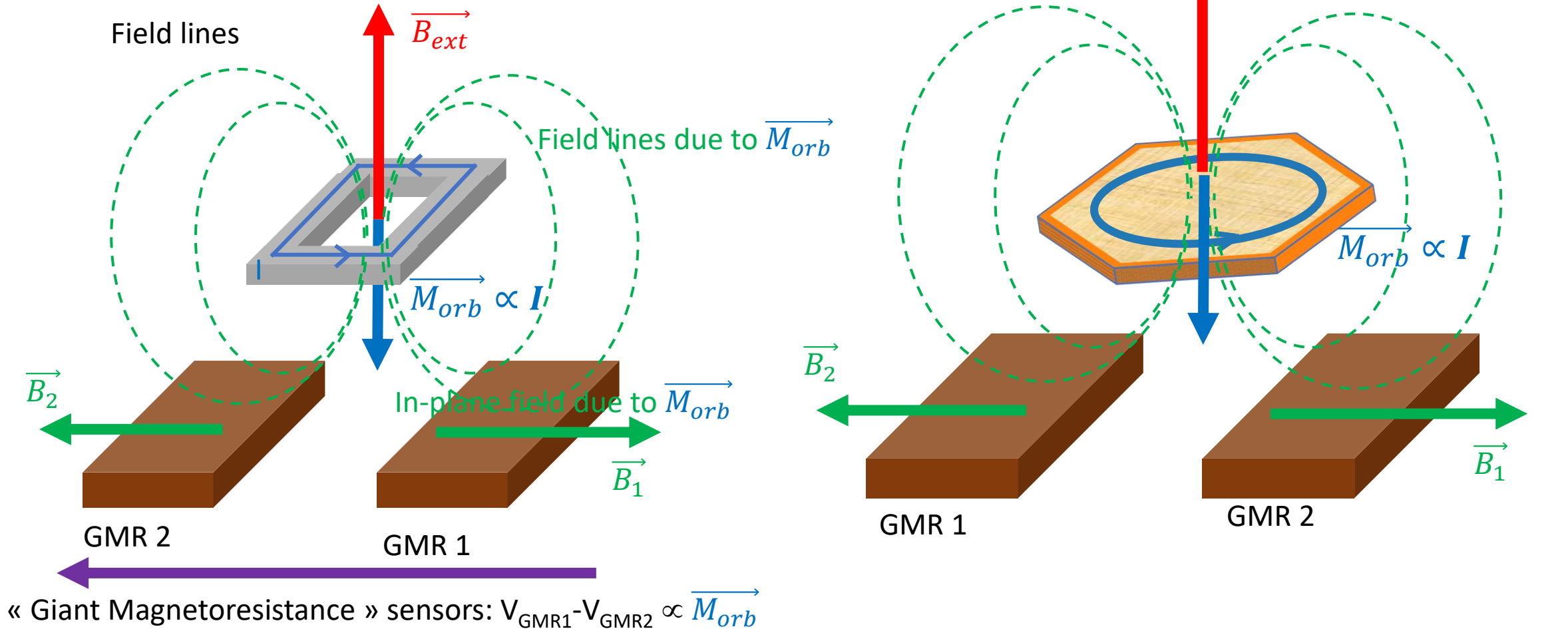
Systèmes topologiques artificiels (nouveau GDR physique topologique, P. Delplace). Réunion de lancement octobre 2026!

Mesoscopic physics group in LPS Orsay, 2026



Goal: **Periodic** persistent current in 2DTIs and HOTIS?

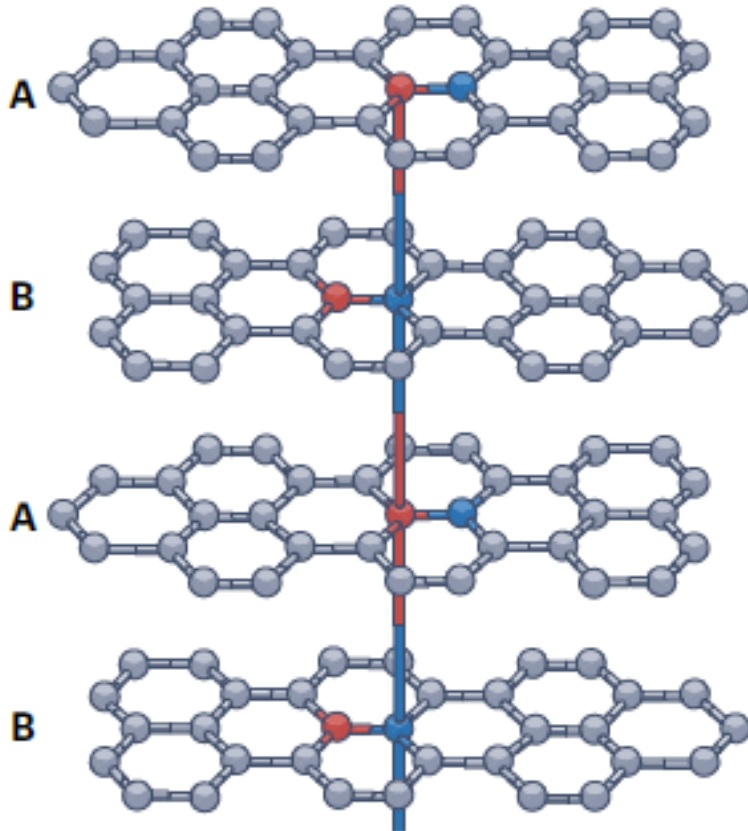
Detect with Magnetoresistive Sensors, only sensitive to in-plane field



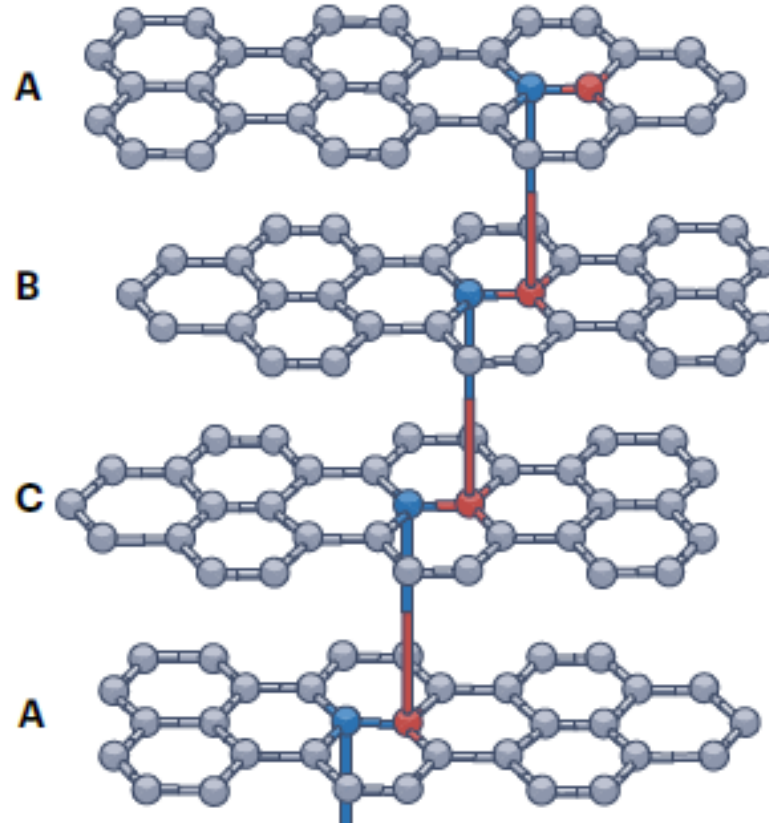
Mais difficile si les échantillons n'ont pas de dopage modulable...

Deux empilements pour le graphite

Bernal



Rhombohedral



Donne lieu à des bandes extra plates

Effets d'interaction!:
Supraconductivité (à bande plate: à vitesse nulle? Effet de courbure de Berry?

Effet Hall quantique anormal (=isolant de Chern)

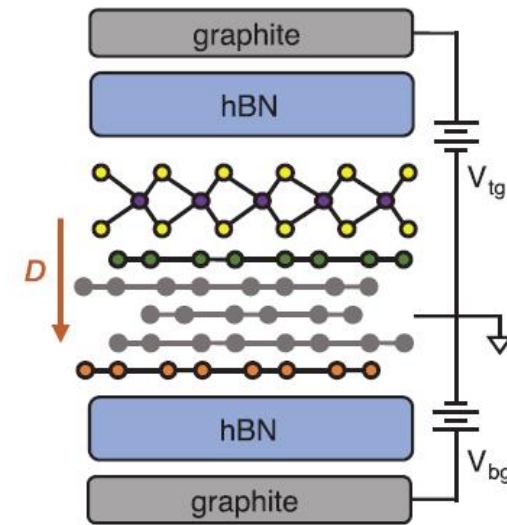
Conductance de Hall quantifiée en champ nul!

Sonder ces états avec le magnétisme orbital?

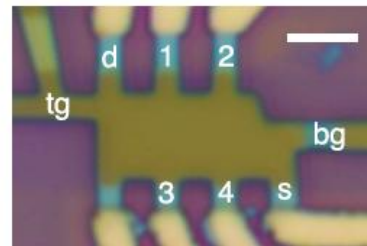
Quantum anomalous Hall dans le graphène rhombohedral Isolant de Chern avec $C=5$, en champ nul

Large quantum anomalous Hall effect in spin-orbit proximitized rhombohedral graphene,
Han, Long Ju et al, Science 2024

Aussi supraconductivité,

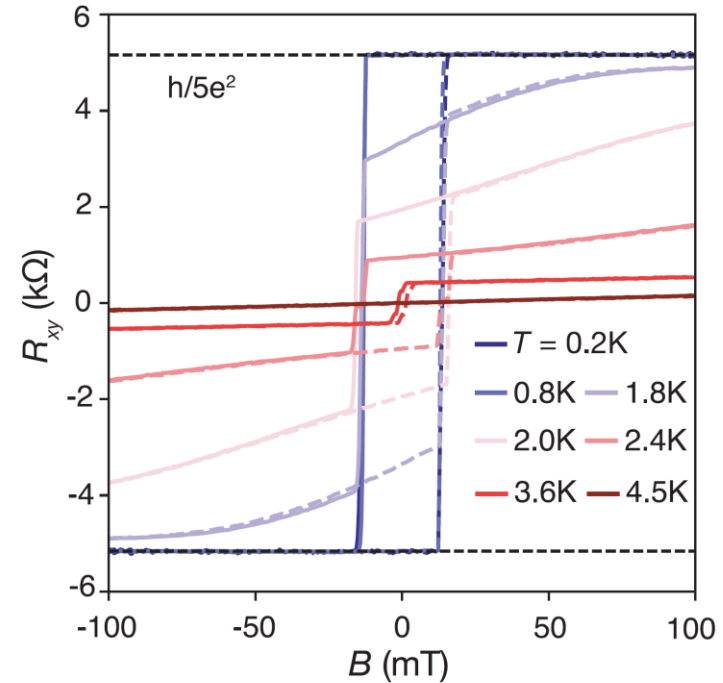


B

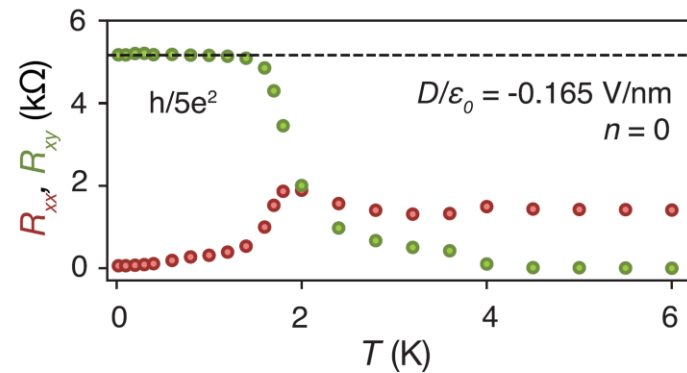


R_{xy} quantifié en l'absence de B_{ext} !

A



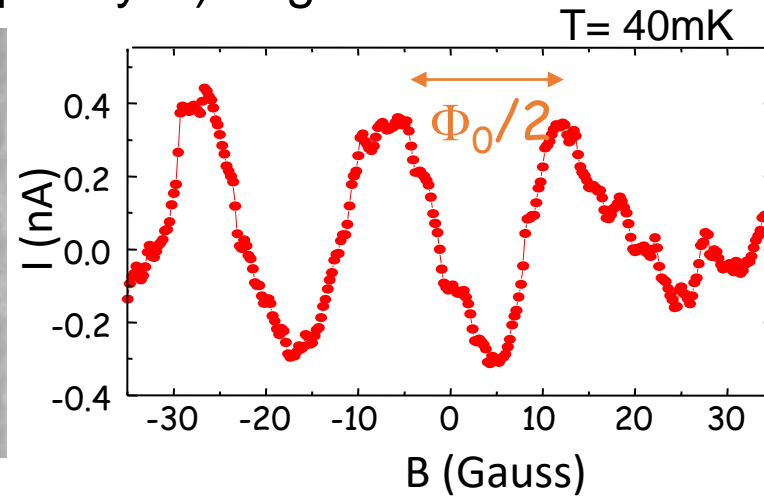
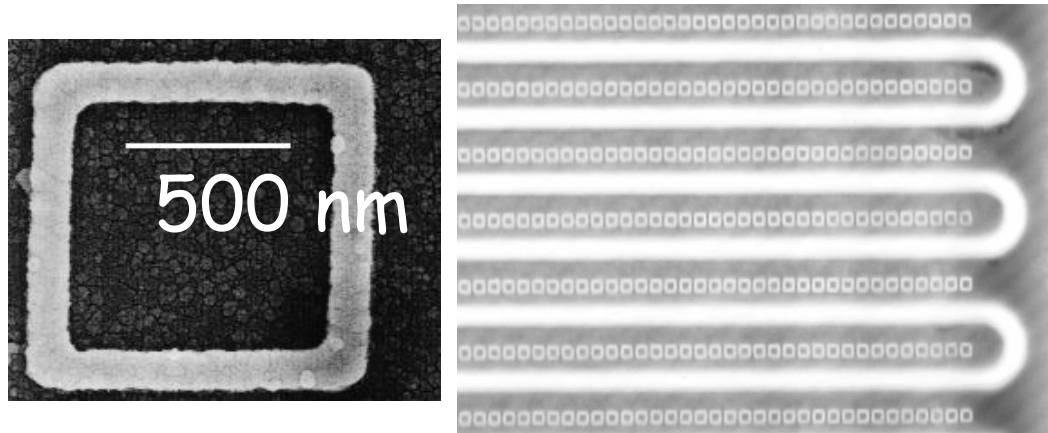
C



Outlook: Periodic persistent current in material with helical edge states ? (another mesoscopic test of topology)

Preamble: A mesoscopic ring has a **periodic persistent** current (no need for superconducting loop, since phase coherence)

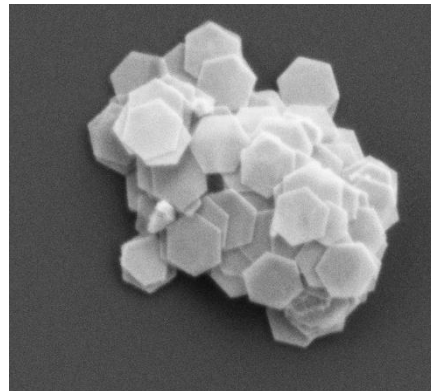
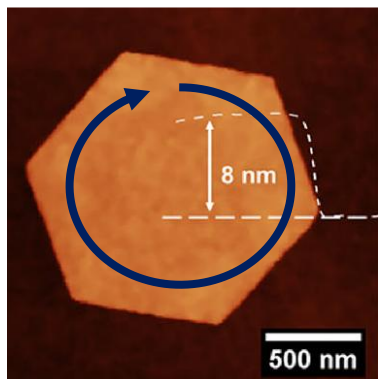
Detection of persistent current of 100 000 Ag (purely N) rings



- Ensemble average: $\Phi_0/2$ periodicity
- Persistent current in each ring $= e/\tau_D = 0.3$ nA

Deblock, Bouchiat et al. 2002

If helical edge states, should see the same in a flake (no need for ring!)



Bismuth hexagons, almost identical,
G. Abellan, Valencia, JACS 2023