L'UNITÉ DE LA PHYSIQUE SELON TH. KALUZA

Zum Unitätsproblem der Physik.

Von Th. Kaluza
in Königsberg.

(Vorgelegt von Hrn. Einstein am 8. Dezember 1921 [s. oben S. 859].)

In der allgemeinen Relativitätstheorie muß zur Charakterisierung des Weltgeschehens dem als Tensorpotential der Gravitation gedeuteten metrischen Fundamentaltensor der vierdimensionalen Weltmannigfaltigkeit $g_{\mu\nu}$ noch das elektromagnetische Viererpotential q_μ zur Seite treten.

Der so auch hier verbleibende Dualismus von Gravitation und Elektrizität nimmt zwar jener Theorie nichts von ihrer bestrickenden Schönheit, fordert aber aufs neue zu seiner Überwindung durch ein restlos unitarisches Weltbild heraus.

Einen überraschend kühnen Vorstoß zur Lösung dieses Problems, das zu den großen Lieblingsideen des Menschengeistes gehört, hat vor einigen Jahren H. Weyl[1] unternommen, der bei einer nochmaligen, radikalen Revision der geometrischen Grundlegung neben dem Tensor $g_{\mu\nu}$ noch eine Art metrischen Fundamentalvektor erhält und als elektro-

Un univers à 1 + 4 dimensions

- L'interaction EM et l'interaction gravitationnelle en relativité
- La géométrie de l'espace à 1 + 4 dimensions (R_5) de Th. K.
- Les équations d'Einstein dans R_5
- L'équation du mouvement de la matière chargée électriquement dans R_5
- Formulation Lagrangienne et variante du tenseur métrique par O. Klein
- Quantification de la charge électrique et étendue de la $5^{ème}$ dimension

L'INTERACTION EM EN RELATIVITÉ RESTREINTE

1 Unités, conventions et notations

$$\varepsilon_0 = \mu_0 = 1 = c$$

$$\lambda, \mu, \nu \ldots = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$x^\mu = \{t, x, y, z\}$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \partial^\mu \equiv {}^{,\mu}$$

2. Grandeurs covariantes

$$j^\mu = \{\rho, \vec{j}\} = \rho_0 \frac{dx^\mu}{d\tau} = \rho_0 u^\mu$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} = A^{\nu,\mu} - A^{\mu,\nu}$$

3. Équations de Maxwell

(1) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho(\vec{r}, t)$

(2) $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \rho \vec{v}$

$$\Big\} \; F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = j^\mu$$

(3) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

(4) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

$$\Big\} \; F_{[\mu\nu,\lambda]} = 0$$

4. Équation du mouvement de la matière chargée électriquement

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \rho \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

$$\mu_0 \frac{du^\mu}{d\tau} = \rho_0 F^{\mu\nu} u_\nu$$

L'INTERACTION GRAVITATIONNELLE EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE (1)

1. Tenseur métrique $\quad ds^2 = g_{\mu\nu}(x^\alpha)\, dx^\mu dx^\nu$

2. Symboles de Christoffel

$$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\left(g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}\right) \qquad \underline{\text{pas}} \text{ un tenseur}$$

On définit aussi

$$\Gamma_{\mu\alpha\beta} \equiv g_{\mu\nu}\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(g_{\mu\alpha,\beta} + g_{\beta\mu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\mu}\right) \qquad \underline{\text{pas}} \text{ un tenseur}$$

3. Courbure

Tenseur de courbure de Riemann

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}(x^\rho) = -\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu,\mu} + \Gamma^\sigma{}_{\beta\nu}\Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma{}_{\beta\mu}$$

(espace plat $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}(x^\rho) = 0$)

Tenseur de Ricci

$$R_{\beta\mu} = R^\alpha{}_{\beta\mu\alpha} \quad (= R_{\mu\beta})$$

Courbure scalaire

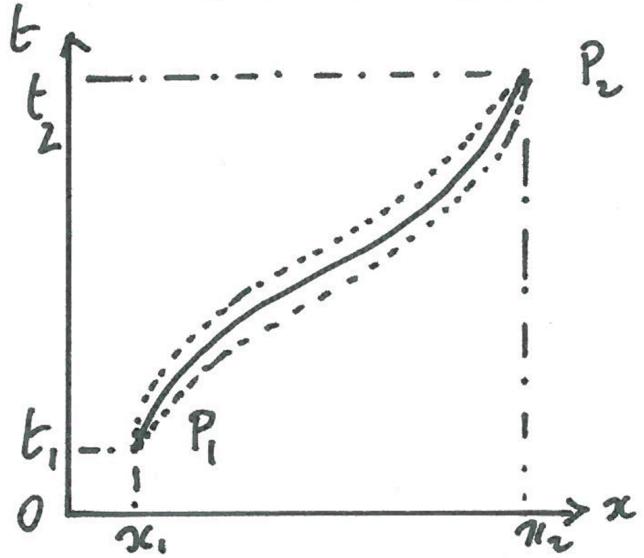
$$R = R^\alpha{}_\alpha$$

4. Équations d'Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G \, T_{\mu\nu}^{(mat)}$$

où $T_{\mu\nu}^{(mat)} = \rho_0 \, u_\mu u_\nu$ (ρ_0 = masse volumique 'propre')

5. Géodésiques de l'espace-temps et éq. du mvt pour une particule



$\int_{P_1}^{P_2} ds$ stationnaire

$$\longrightarrow \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} = 0$$

ds est un invariant → $ds = c\,d\tau$ (τ = temps propre)

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} u^\nu u^\sigma = 0$$

POUR UNIFIER L'INTERACTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE
ET L'INTERACTION GRAVITATIONNELLE
IL FAUT

1. faire en sorte qu'un tenseur de la forme $F^{\mu\nu} = A^{\nu,\mu} - A^{\mu,\nu}$ apparaisse dans la courbure (tenseur de Ricci)

2. définir de façon **dynamique** l'équivalent d'une (densité de) charge électrique

3. qu'un terme additionnel de la forme $F^{\mu\nu} u_\nu$ apparaisse dans les équations des géodésiques

LA GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE À 1 + 4 DIMENSIONS (R_5) de TH. K. (1)

1. Une cinquième dimension

$$A, B, C \ldots = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$
$$\phantom{A, B, C \ldots = \{} t \;\; x \;\; y \;\; z \;\; u$$

$$d\sigma^2 = g_{AB}\, dx^A dx^B \quad \text{(15 termes)}$$

$$g_{AB} = \left(\begin{array}{cccc|c} & & & & g_{04} \\ & g_{\mu\nu} & & & g_{14} \\ & \text{(10 termes)} & & & g_{24} \\ & & & & g_{34} \\ \hline g_{40} & g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{array}\right)$$

2. Th Kaluza choisit

1. g_{AB} indépendant de x^4 pour préserver la gravitation

$$\rightarrow \quad \Gamma_{\mu 4 \nu} = \frac{1}{2}\left(g_{\mu 4,\nu} - g_{\nu 4,\mu}\right)$$

2. $$g_{\mu 4}(x^\rho) = g_{4\mu}(x^\rho) = 2\alpha A_\mu(x^\rho) \quad \text{où} \quad \alpha = c^{\underline{te}}$$

3. $$g_{44}(x^\rho) = 2\phi(x^\rho)$$

LA GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE À 1 + 4 DIMENSIONS (R_5) de TH. K. (2)

$$g_{AB} = \left(\begin{array}{cccc|c} & & & & 2\alpha A_0 \\ & g_{\mu\nu} & & & 2\alpha A_1 \\ & & & & 2\alpha A_2 \\ & & & & 2\alpha A_3 \\ \hline 2\alpha A_0 & 2\alpha A_1 & 2\alpha A_2 & 2\alpha A_3 & 2\phi \end{array}\right)$$

$\Gamma_{\mu\nu\rho}$ inchangés

$$\Gamma_{\mu 4\nu} = \alpha\,(A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu})$$

$$\Gamma_{4\mu\nu} = \alpha\,(A_{\mu,\nu} + A_{\nu,\mu})$$

$$\Gamma_{44\mu} = -\Gamma_{\mu 44} = \phi_{,\mu}$$

$$\Gamma_{444} = 0$$

Th Kaluza définit les tenseurs

$$F_{\mu\nu} = -(A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}) \quad \text{et} \quad \Sigma_{\mu\nu} = -(A_{\mu,\nu} + A_{\nu,\mu})$$

3. Deux dernières équations de Maxwell

$$\Gamma_{A\underset{\uparrow}{D}B,C} + \Gamma_{C\underset{\uparrow}{D}A,B} + \Gamma_{B\underset{\uparrow}{D}C,A} = \Gamma_{[ABC],\underset{\uparrow}{D}}$$

$$\left.\begin{array}{l} A=\mu \\ B=\nu \\ C=\lambda \\ D=4 \end{array}\right\} \longrightarrow \; -\alpha F_{[\mu\nu,\lambda]} = 0$$

LA GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE À 1 + 4 DIMENSIONS (R_5) de TH. K. (3)

Hypothèse de champ faible

$$g_{AB} = \eta_{AB} + h_{AB} \longrightarrow \Gamma^{A}{}_{BC} \simeq \eta^{AB}\,\Gamma_{ABC} \quad \text{et} \quad R^{A}{}_{BCD} \simeq -\Gamma^{A}{}_{BC,D} + \Gamma^{A}{}_{BD,C}$$

4. Tenseur de Ricci (15 composantes)

10 $$R_{\mu\nu} = R^{A}{}_{\mu\nu A} = R^{\alpha}{}_{\mu\nu\alpha} + R^{4}{}_{\mu\nu 4}$$

$$= R^{(4)}{}_{\mu\nu} - \Phi_{,\mu\nu}$$ le 2nd terme n'est pas mentionné par Th K

4 $$R_{4\mu} = R^{A}{}_{4\mu A} = \alpha\, F^{\nu}{}_{\mu,\nu}$$

1 $$R_{44} = R^{A}{}_{44A} = -\Phi^{,\mu}{}_{,\mu} = -\Box\Phi$$

$\Sigma_{\mu\nu}$ n'intervient pas!

LES ÉQUATIONS D'EINSTEIN DANS R_5 (1)

1. Dans le vide : $T_{AB} = 0$ → $R_{AB} = 0$

- $R_{\mu\nu} = 0$ Équations d'Einstein : champ de spin 2
- $R_{4\mu} = \alpha F^{\nu}{}_{\mu,\nu} = 0$ Deux premières équations de Maxwell dans le vide: champ de spin 1
- $R_{44} = -\Box \phi = 0$ Équation de Klein-Gordon : champ de spin 0

2. En présence de matière en mouvement, chargée électriquement:

$$T_{AB} = \rho_0 \, u_A \, u_B$$

LES ÉQUATIONS D'EINSTEIN DANS R_5 (2)

$$R_{AB} - \frac{1}{2} g_{AB} R = -8\pi G \rho_0 u_A u_B$$

où $R = R^A{}_A = R^\alpha{}_\alpha + R^4{}_4 = R^{(4)} + \Box\Phi$

(1) $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R = -8\pi G \rho_0 u_\mu u_\nu$ les équations d'Einstein sont préservées

(2) $R_{4\mu} = \alpha F^\nu{}_{\mu,\nu} = -8\pi G \rho_0 u_4 u_\mu$

Cette équation est équivalente aux 2 premières éqs de Maxwell en présence de matière électriquement chargée

$$F^\nu{}_{\mu,\nu} = \rho_0 u_\mu$$

si on définit la densité de charge électrique par

$$\rho_0 = \frac{8\pi G}{\alpha} \rho_0 u^4$$

À un facteur près qui est une constante fondamentale, le produit de la masse volumique par la vitesse (~ constante) selon la 5ème dimension joue le rôle de la densité de charge électrique.

(3) $R_{44} + \frac{1}{2} R = -8\pi G \rho_0 (u_4)^2$

le tenseur énergie-impulsion étendu

$$T_{AB} = \left(\begin{array}{cccc|c} & & & & \chi j_0 \\ & \rho_0 u_\mu u_\nu & & & \chi j_1 \\ & & & & \chi j_2 \\ & & & & \chi j_3 \\ \hline \chi j_0 & \chi j_1 & \chi j_2 & \chi j_3 & \rho_0 (u_4)^2 \end{array} \right) \qquad \text{où} \quad \chi = -\frac{\alpha}{8\pi G} = \frac{-1}{4(\pi G)^{1/2}}$$

LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DE LA MATIÈRE CHARGÉE ÉLECTRIQUEMENT DANS R_5 (1)

Nouvelle hypothèse : la matière n'est pas relativiste

$$u_0 \simeq 1 \qquad u_1, u_2, u_3, u_4 << 1$$

$$\tau_{(5)} \simeq \tau_{(4)} \simeq t$$

$$u^\nu_{(5)} \simeq u^\nu_{(4)}$$

$$T_{00} \simeq \rho_0 \qquad T_{11}, T_{22}, T_{33}, T_{44} \simeq 0$$

LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DE LA MATIÈRE CHARGÉE ÉLECTRIQUEMENT DANS R_5 (2)

Rappel de l'équation du mvt en relativité générale: $$\frac{d\,u^A}{d\tau} + \Gamma^A{}_{BC}\, u^B u^C = 0$$

- $$\frac{d\,u^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\, u^\nu u^\sigma + 2\,\Gamma^\mu{}_{4\sigma}\, u^4 u^\sigma + \Gamma^\mu{}_{44}\,(u^4)^2 = 0$$

  inter. grav. & $\quad 2\alpha\, F^\mu{}_\sigma\, u^4 u^\sigma \quad - \phi^{,\mu}\,(u^4)^2$ négligé par Th. K

  $$\left.\begin{array}{l} 2\alpha u^4 = \rho_0/\mu_0 \rightarrow \text{inter. EM} \\[2ex] \rho_0 = \dfrac{8\pi G}{\alpha}\,\mu_0\, u^4 \end{array}\right\} \alpha = 2\,(\pi G)^{1/2}$$

- $$\frac{du^4}{d\tau} = -\Gamma^4{}_{BC}\, u^B u^C \simeq \alpha\, \Sigma_{00} \sim 2\alpha\,\frac{\partial V}{\partial t} \sim 0$$ 'approximation quasi-statique' in an XY chromosome pair, though in all other cases it requires also a recessive partner. Numerically, on the simplest assumptions, we should expect the variability due to the sex chromosome in the heterogametic sex to be increased by about 9·86 per cent., while that of the homogametic sex should be diminished by 27·47 per cent. The difference is 51·5 per cent. of the smaller value, and on comparing this with our observed difference of 38 per cent. it will be seen that either additional causes must be sought for the striking excess of female variation, or the greater part of the variation present must be ascribed to the sex chromosome, which is unlikely.

Whatever may be the explanation of this great apparent activity of the sex chromosome, the two main inferences from the statistical study of the effect of Mendelian factors under selection, (1) that variability in any one locality is greater for the more numerous species, (2) that it is greater in the heterogametic sex, have both been unmistakably verified in the body of material which we have examined.

R. A. FISHER.

Rothamsted Exp. Station.

E. B. FORD.

Wadham College, Oxford.

The Atomicity of Electricity as a Quantum Theory Law.

IN the five-dimensional theory of the connexion between electromagnetism and gravitation first proposed by Th. Kaluza (*Sitzungsberichte d. Berl. Akad.*, 1921, S. 966; see also O. Klein, *Zs. für Phys.*, 37, 875, 1926), the equations of motion of an electrified particle may be shown to be the equations of geodetics belonging to the following line element:

$$d\sigma = \sqrt{(dx^0 + \beta\phi_i dx^i)^2 + g_{ik}dx^i dx^k}, \qquad (1)$$

where x^1, x^2, x^3, x^4 are the co-ordinates of ordinary space time with the line element $g_{ik}dx^i dx^k$, while x^0 is a fifth co-ordinate, and the ϕ_i are the four co-variant components of the electromagnetic potential vector. If the constant β is given the value

[...]

always a whole multiple of the electronic charge, so that we may write

$$p_0 = \frac{N\epsilon}{\beta c}, \qquad (6)$$

ϵ being the electronic charge and N a whole number, positive or negative. This formula suggests that the atomicity of electricity may be interpreted as a quantum theory law. In fact, if the five-dimensional space is assumed to be closed in the direction of x^0 with a period l, and if we apply the formalism of quantum mechanics to our geodetics, we shall expect p_0 to be governed by the following rule:

$$p_0 = N\frac{h}{l}, \qquad (7)$$

N being now a quantum number, which may be positive or negative according to the sense of motion in the direction of the fifth dimension, and h the constant of Planck. Comparing (7) with (6), and making use of the value (2) of β, we get for the period l:

$$l = \frac{hc\sqrt{2\kappa}}{\epsilon} = 0{\cdot}8 \times 10^{-30} \text{ cm.} \qquad (8)$$

The small value of this length together with the periodicity in the fifth dimension may perhaps be taken as a support of the theory of Kaluza in the sense that they may explain the non-appearance of the fifth dimension in ordinary experiments as the result of averaging over the fifth dimension.

In a former paper (*Zs. für Phys., l.c.*) the writer has shown that the differential equation underlying the new quantum mechanics of Schrödinger can be derived from a wave equation of a five-dimensional space, in which h does not appear originally, but is introduced in connexion with a periodicity in x^0. Although incomplete, this result, together with the considerations given here, suggests that the origin of Planck's quantum may be sought just in this periodicity in the fifth dimension.

OSKAR KLEIN.

Copenhagen, September 3.

FORMULATION LAGRANGIENNE et VARIANTE DU TENSEUR MÉTRIQUE PAR O. KLEIN

1. Lagrangien dont on déduit l'équation des géodésiques (éqs du mvt)

$$L\left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{d\tau}\right) \qquad p_\mu = \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right)} \qquad \frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{\partial L}{\partial x^\mu}$$

$$L_{RG} = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x^\rho) \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} \longrightarrow \frac{d}{d\tau}\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right) = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\mu}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}$$

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\, u^\alpha u^\beta = 0$$

2. Extension à l'espace à 5 dimensions de Th. Kaluza

Variante du tenseur métrique

$$g_{AB} = \left(\begin{array}{c|c} g_{\mu\nu} + 4\alpha^2 A_\mu A_\nu & 2\alpha A_\mu \\ \hline 2\alpha A_\mu & 1 \end{array}\right) \qquad \text{où } \alpha = 2(\pi G)^{1/2}$$

Lagrangien pour une particule :

$$L_{OK} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\sigma}{d\tau}\right)^2 = \frac{m_0}{2}\left[g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} + \left(\frac{dx^5}{d\tau} + 2\alpha A_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau}\right)^2\right]$$

3. Équations de Lagrange

- pour p_4 $\quad \dfrac{\partial L}{\partial x^4} = 0 \rightarrow p_4 = c^{te}$

0 Klein pose $\quad q_0 = 2\alpha\, p_4$

q_0 = charge électrique de la particule

- pour p_μ $\quad \dfrac{d}{d\tau}\left(g_{\mu\nu}\dfrac{dx^\nu}{d\tau}\right) = \underbrace{\dfrac{1}{2}\, g_{\alpha\beta,\mu}\dfrac{dx^\alpha}{d\tau}\dfrac{dx^\beta}{d\tau}}_{\text{Einstein}} + \underbrace{q_0/m_0\, F_{\mu\nu}\dfrac{dx^\nu}{d\tau}}_{\text{Maxwell}}$

QUANTIFICATION DE LA CHARGE ÉLECTRIQUE ET ÉTENDUE DE LA 5ÈME DIMENSION

1. Quantification de la charge électrique

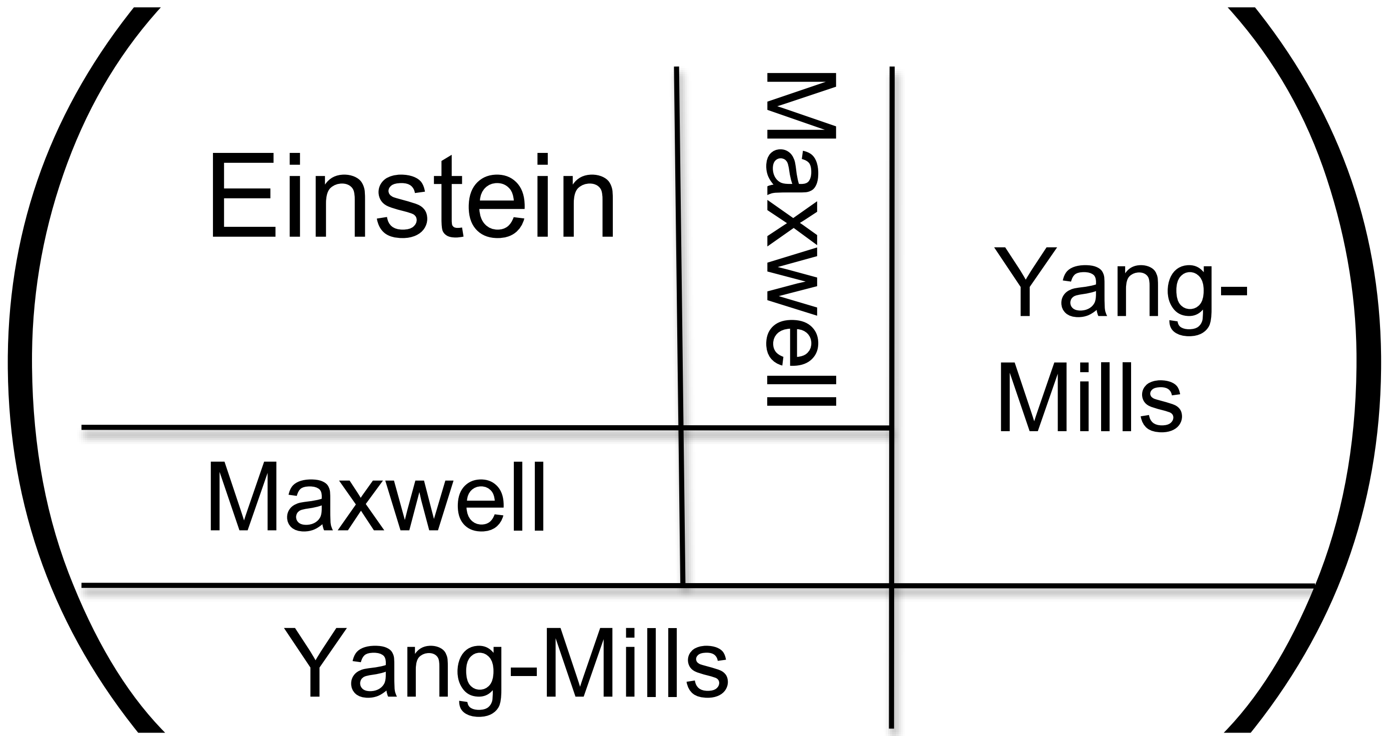
De façon générale, la charge électrique q_0 prend les valeurs Ne

$\rightarrow p_4 = \dfrac{Ne}{4(\pi G)^{1/2}} \rightarrow \lambda_4 = \dfrac{h}{p_4} = \dfrac{4(\pi G)^{1/2}}{Ne}\, h = \dfrac{L_K}{N}$ où L_K est la 'longueur' de la 5ème dimension

2. Étendue de la 5ème dimension

$$L_K = \frac{4(\pi G)^{1/2}}{e}\, hc \sim 10^{-28}\ m$$

$$L_P = \left(\frac{\hbar G}{c^3}\right)^{1/2} \sim 10^{-35}\ m$$



From Michio Kaku

Remerciements:

- Françoise Maréchal
- Michel Sommer
- Nicolas Delerue & Nicolas Leroy