

---

# Analyse en Composantes Morphologiques et Applications en Astrophysique

F. Sureau, J.-L. Starck, J. Bobin,  
CEA-IRFU CosmoStat



# Plan de la Présentation

---

- Introduction: Signaux parcimonieux et compressibles
  - Principe de l'analyse en composantes morphologiques
  - Applications en astrophysique
-



# Qu'est ce que la Parcimonie?

Un signal  $s$  ( $n$  échantillons) peut être représenté comme une somme pondérée d'éléments de base d'un dictionnaire donné

Dictionnaire  
(base, trame)

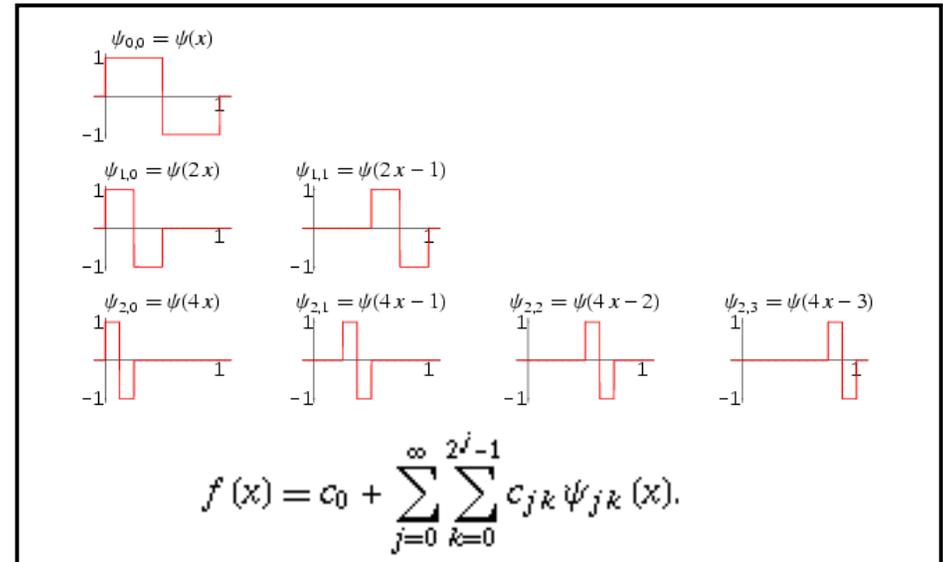
$$\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_K\}$$

Atomes

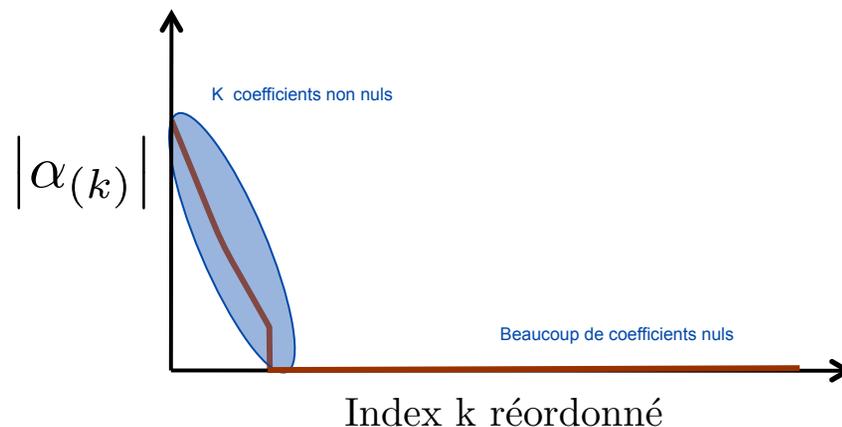
$$s = \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi_k = \Phi \alpha$$

vecteur de coefficients

Ex: Ondelettes de Haar

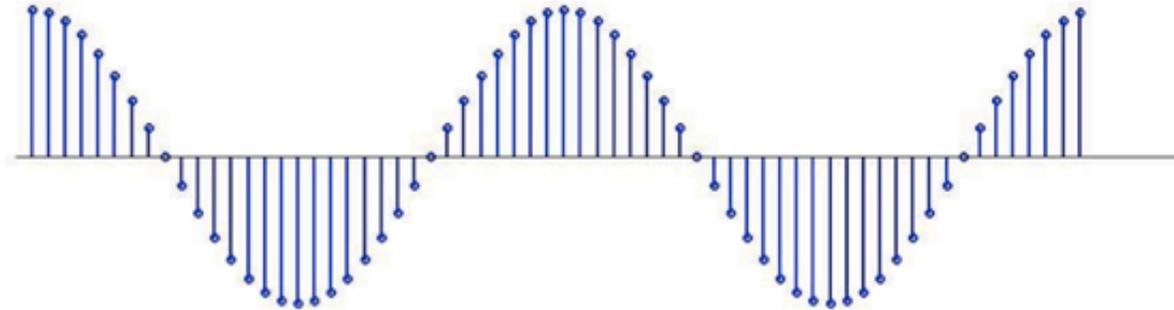


Signal  $K$ -parcimonieux



# Parcimonie Stricte : Signal K-Parcimonieux

K-parcimonieux : K coefficients différents de zéro



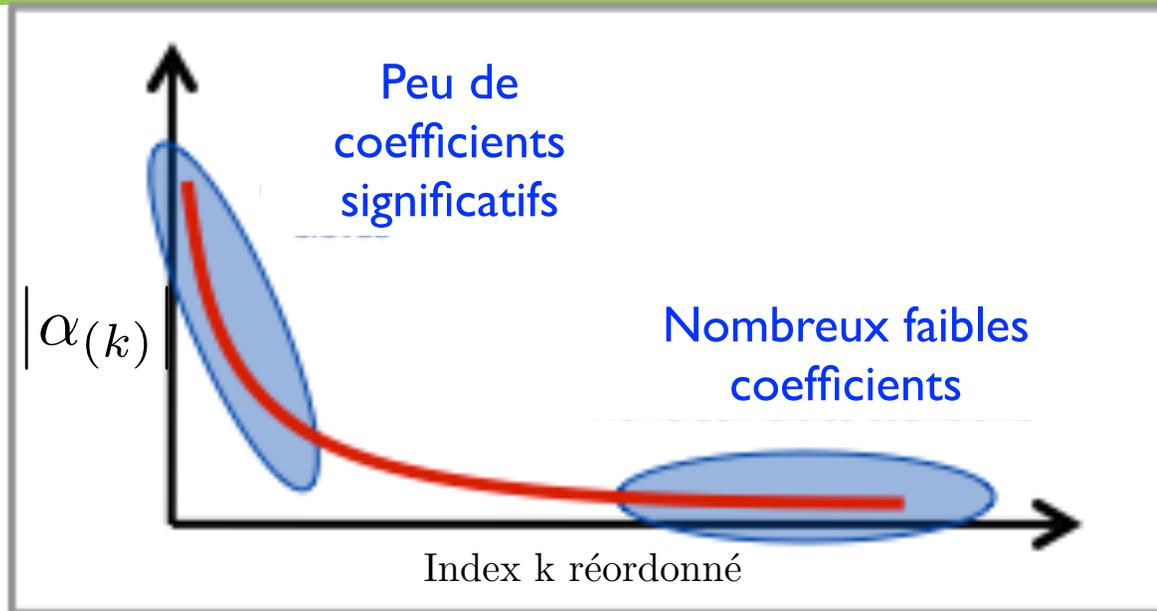
Une sinusoïde dans l'espace direct

... est un Dirac dans l'espace de Fourier



Une sinusoïde est 1-parcimonieuse en Fourier

# De la Parcimonie à la Compressibilité



$$|\alpha(k)| \leq Ck^{-1/q} \Leftrightarrow \|\alpha - \alpha_K\|_2 \leq C_q K^{1/2-1/q} \quad q < 2$$

Meilleure  
approximation  
K-termes

Courbe Non-Linéaire d'Approximation :  $f(K) = \|\alpha - \alpha_K\|_2$

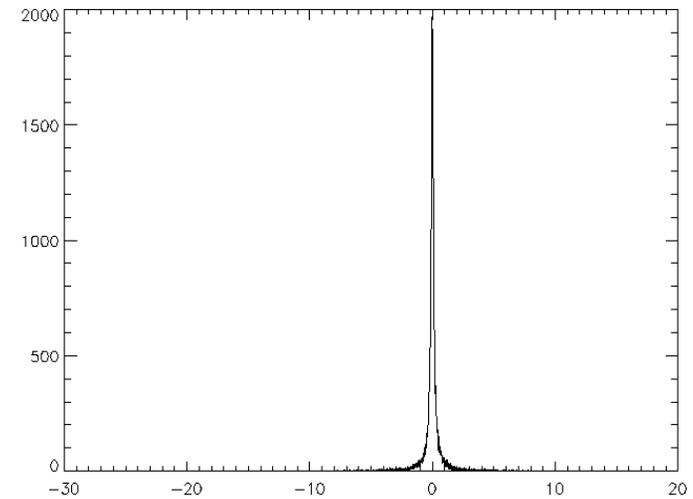
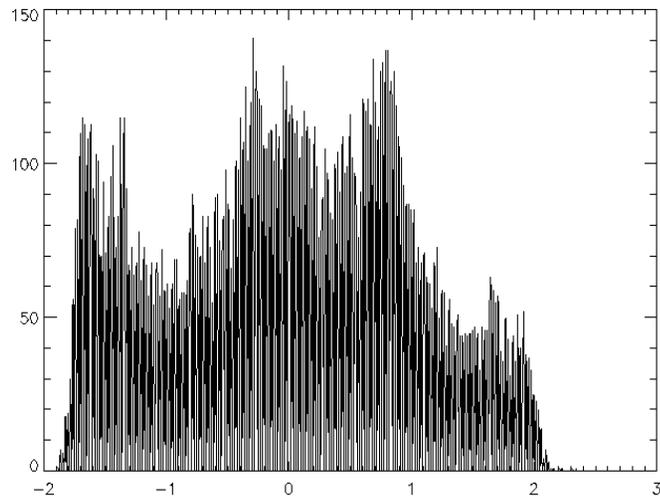
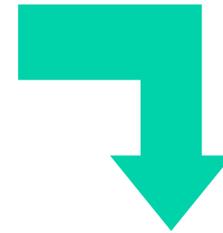
Un signal compressible peut être approché finement par un signal parcimonieux

# Exemple de Signal Compressible

Espace Direct

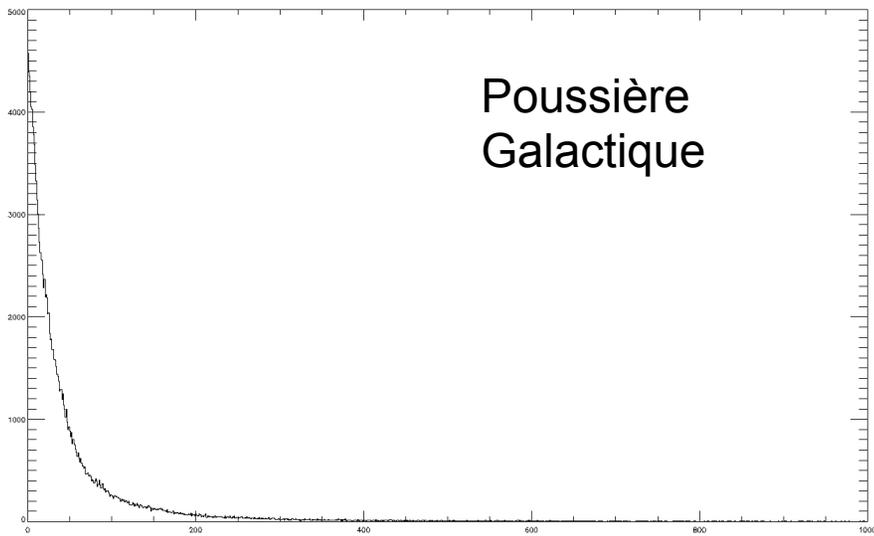


Curvelets

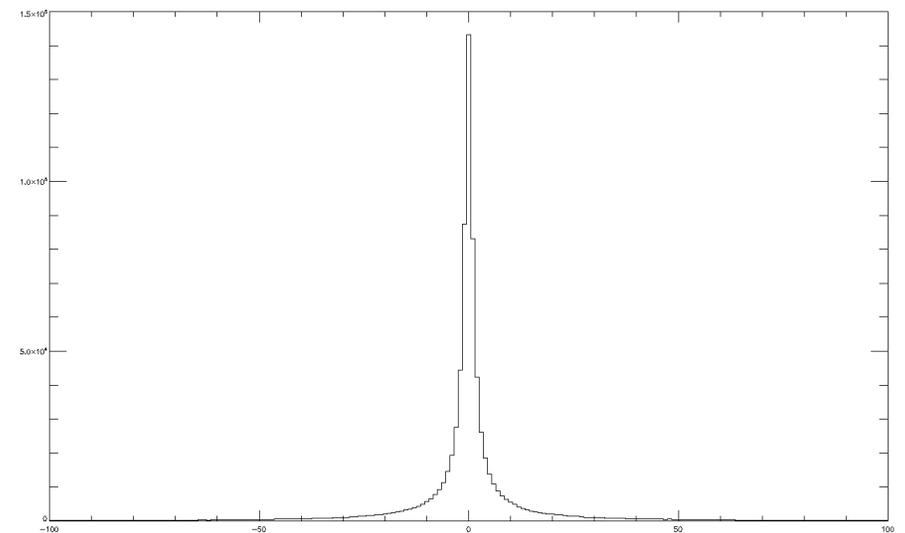


# ... Et en Astrophysique (Planck)

Domaine Spatial



Ondelettes sur la Sphère



# Décomposition Parcimonieuse ?

---

Avec la convention  $0^0 = 0$ ,  $\|\alpha\|_0 = \sum_k \alpha_k^0 = |\{\alpha_k \neq 0\}|$  mesure la parcimonie

Mathématiquement, la décomposition la plus parcimonieuse est obtenue via:

$$(P0) \text{ minimize } \|\alpha\|_0 \text{ tel que } s = \phi\alpha$$

Ce problème est non-convexe et combinatoire, et on le remplace en pratique souvent par:

$$(P1) \text{ minimize } \|\alpha\|_1 \text{ tel que } s = \phi\alpha$$

[Donoho, Huo 1999] a montré que pour des dictionnaires incohérents, s'il existe une décomposition suffisamment parcimonieuse de (P1) alors elle est aussi la solution de (P0). La propriété clef est la cohérence mutuelle du dictionnaire (deux atomes doivent être suffisamment différents - mesuré par leur produit scalaire)

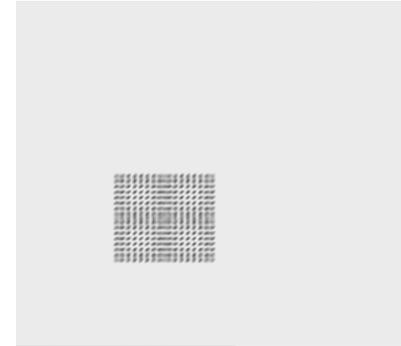
---

# Quelle Représentation ?

---

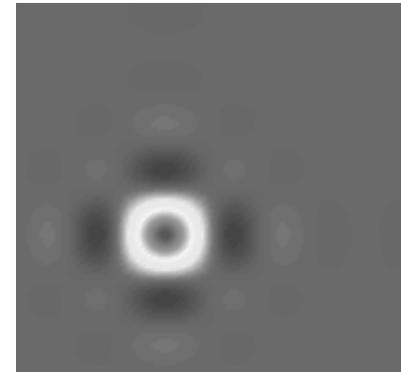
DCT Locale

Textures stationnaires  
oscillations locales



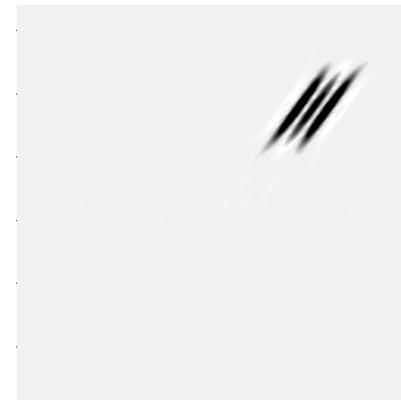
Transformée  
en ondelettes...

Réguliers par morceaux  
structures isotropes



Transformée  
en Curvelets...

Réguliers par morceaux  
Bords



# Plan de la Présentation

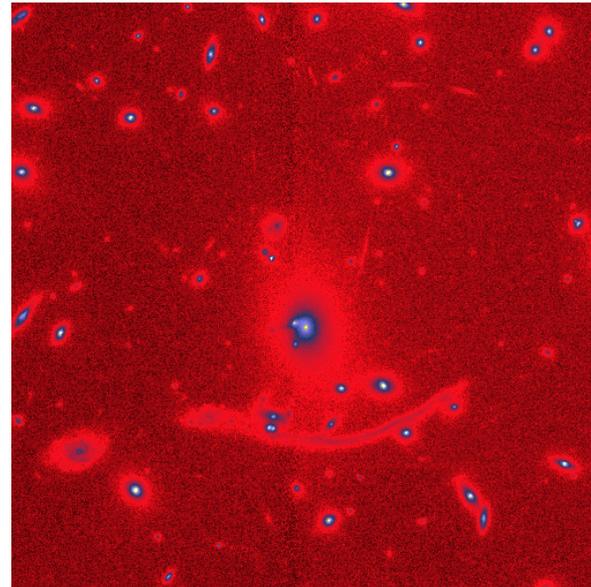
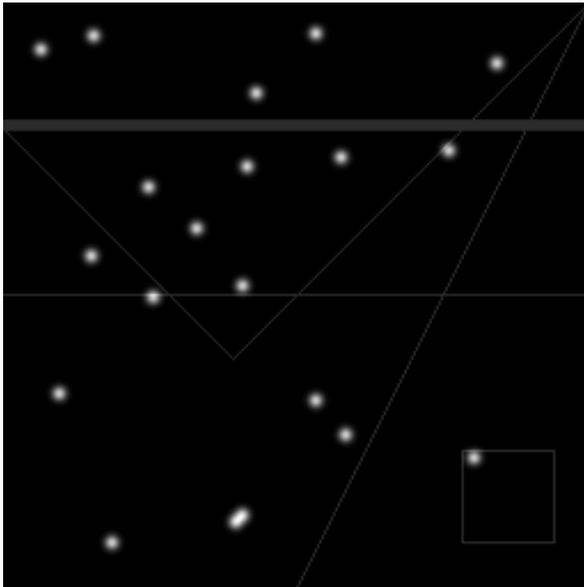
---

- Introduction: Signaux parcimonieux et compressibles
  - Principe de l'analyse en composantes morphologiques
  - Applications en astrophysique
-

# Diversité Morphologique

---

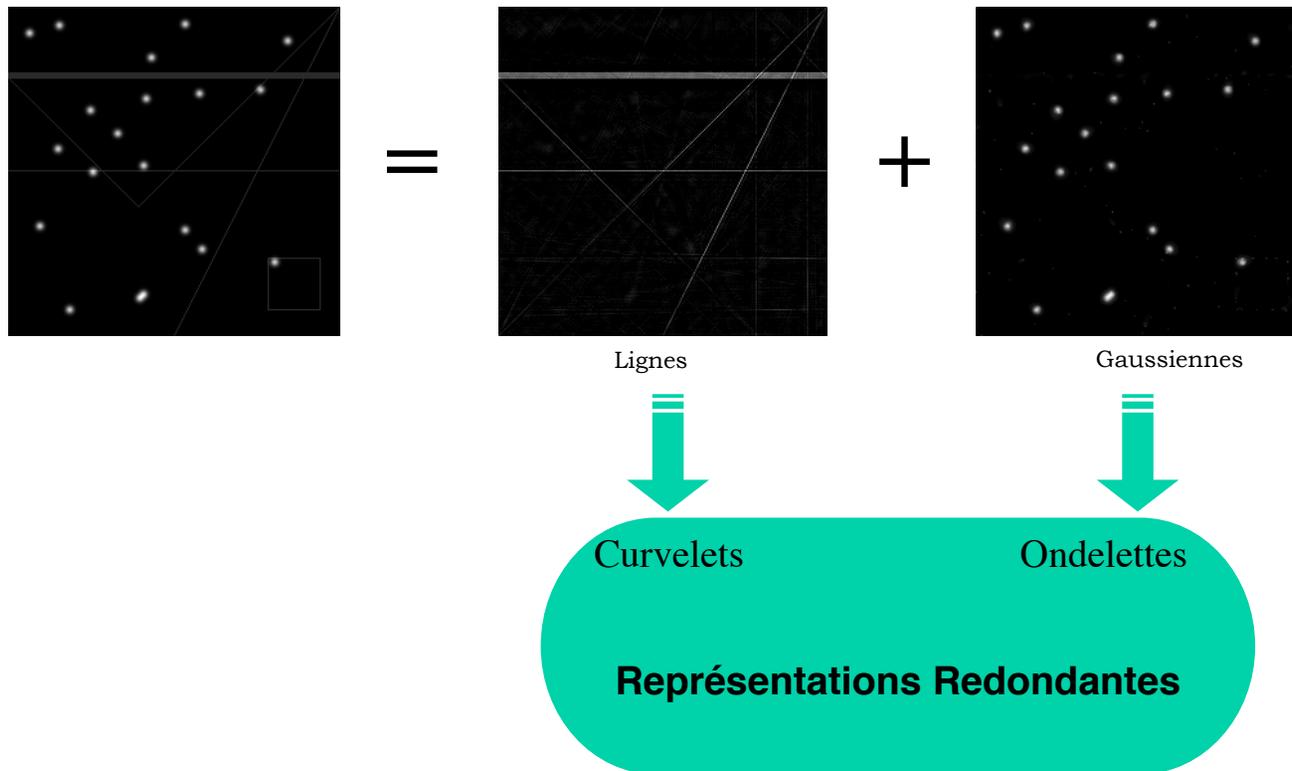
PB: une transformée n'est pas nécessairement une **bonne représentation** pour toutes les structures du signal !



# Diversité de Représentations

Somme de composantes parcimonieuses dans des représentations différentes

$$s = \sum_{k=1}^K s_k, s_k = \Phi_k \alpha_k, \alpha_k \text{ parcimonieux}$$



# Analyse Composantes Morphologiques

$$\text{minimiser}_{s_k} \left\| s - \sum_{k=1}^K s_k \right\|_2^2 + \lambda \sum_{k=1}^K \|\Phi_k s_k\|_p, \quad p \in \{0, 1\}$$

-  $\forall k = 1..K, s_k \leftarrow 0$ , choisir  $\lambda^{(0)}$  élevé

- Pour  $j = 1, \dots, Niter$

- Pour  $k = 1, \dots, K$ :

$$\text{minimiser}_{s_k} \left\| s - \sum_{i=1, i \neq k}^K s_i - s_k \right\|_2^2 + \lambda^{(j)} \|\Phi_k s_k\|_p$$

obtenus par un simple seuillage fort/doux de  $s_r = s - \sum_{i=1, i \neq k}^K s_i$

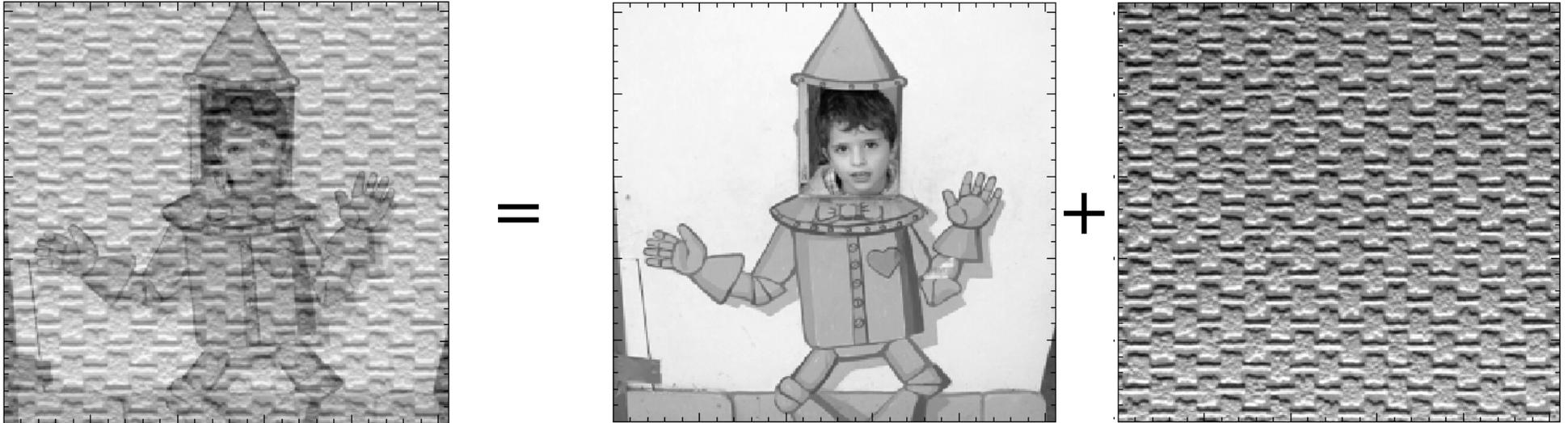
-  $\lambda^{(j+1)} = \epsilon^{(j)} \lambda^{(j)}, 0 \leq \epsilon^{(j)} < 1$

• *Redundant Multiscale Transforms and their Application for Morphological Component Analysis*, *Advances in Imaging and Electron Physics*, 132, 2004.

• *Image Decomposition Via the Combination of Sparse Representation and a Variational Approach*, *IEEE Trans. on Image Proces.*, 14, 10, pp 1570--1582, 2005

• *Morphological Component Analysis: an adaptive thresholding strategy*, *IEEE Trans. on Image Processing*, Vol 16, No 11, pp 2675--2681, 2007.

# Exemple Historique (Starck et al 2004)

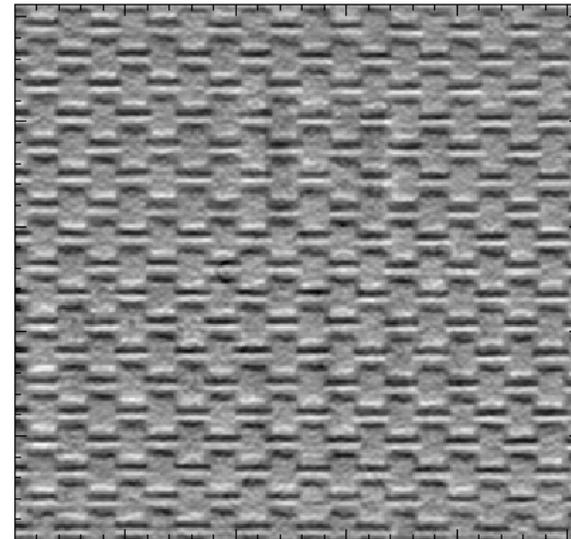


composante curvelet (+TV)

composante DCT



contour



texture

# Quelques Résultats Théoriques

- Bornes déterministes pour la représentation **parcimonieuse sans bruit**:

(P0) minimize  $\|\alpha\|_0$  tel que  $s = \phi\alpha$       (P1) minimize  $\|\alpha\|_1$  tel que  $s = \phi\alpha$

- Si  $\|s\|_0 < \frac{\text{spark}(\Phi)}{2}$  alors (P0) a une unique solution
- Si  $\|s\|_0 < \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{d})$ ,  $d = \max_{i \neq j} |\langle \phi_i, \phi_j \rangle|$  alors (P1) a une unique solution et c'est celle de (P0)
- Des bornes plus hautes peuvent être obtenues si concatenation de deux dictionnaires (non nécessairement orthogonaux) [Kuppinger2012]

- Bornes déterministes pour la représentation de signaux **compressibles bruités**:  
(P2) minimize  $\|\alpha\|_1$  tel que  $\|s - \phi\alpha\|_2 \leq \epsilon$

- Si  $\|s\|_0 < \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{d})$ ,  $d = \max_{i \neq j} |\langle \phi_i, \phi_j \rangle|$  alors la solution  $\hat{s}$  de (P2) vérifie:

$$\|s - \hat{s}\|_2 \leq C_0(d, K)\epsilon + C_1(d, K)\|\hat{x} - x_K\|_1$$

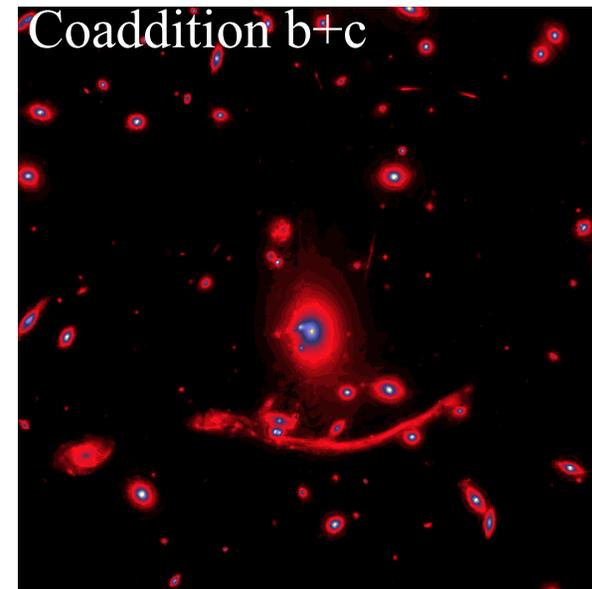
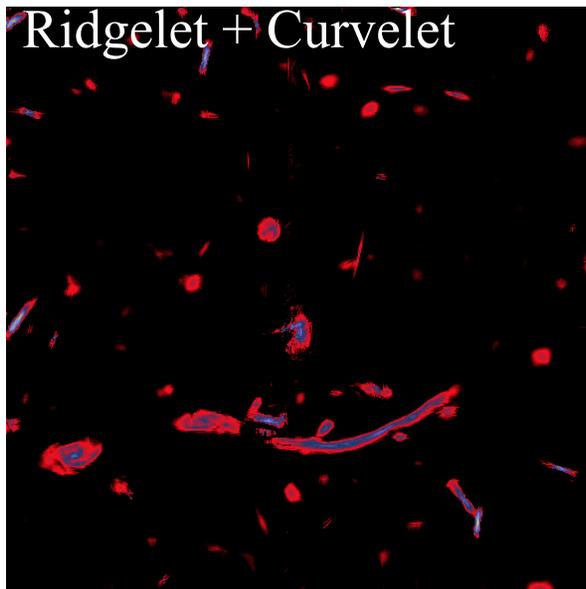
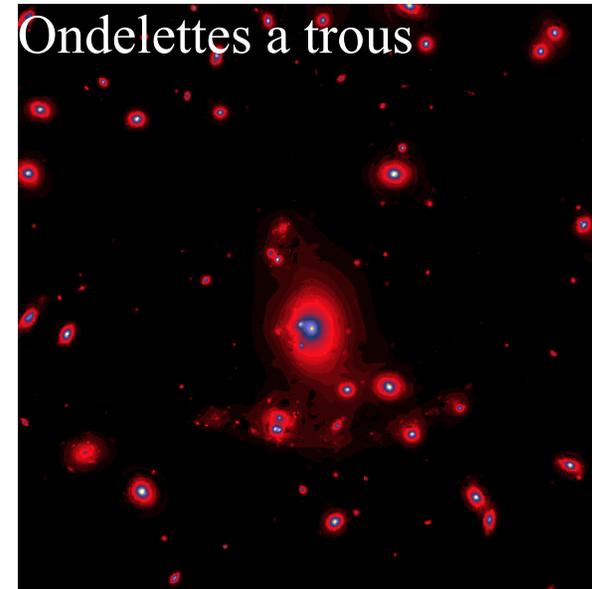
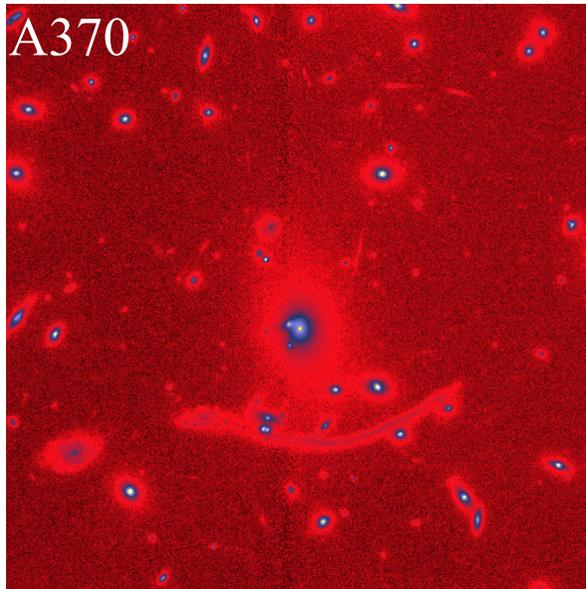
- Des bornes plus hautes peuvent être obtenues si concatenation de deux dictionnaires (non nécessairement orthogonaux) [Studer2014]

# Plan de la Présentation

---

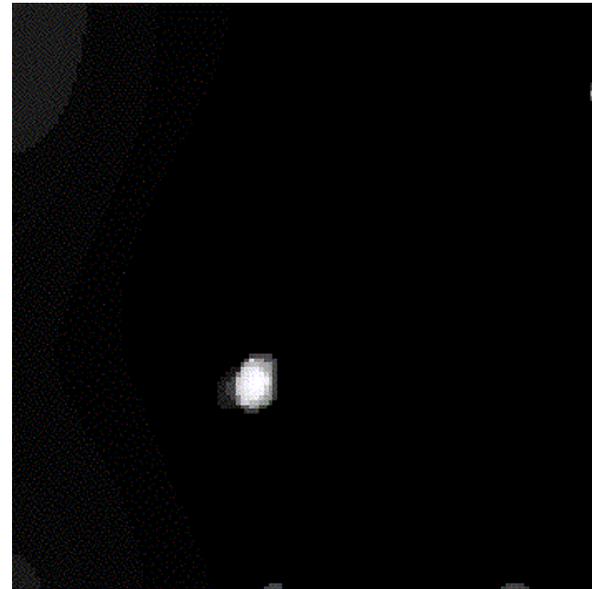
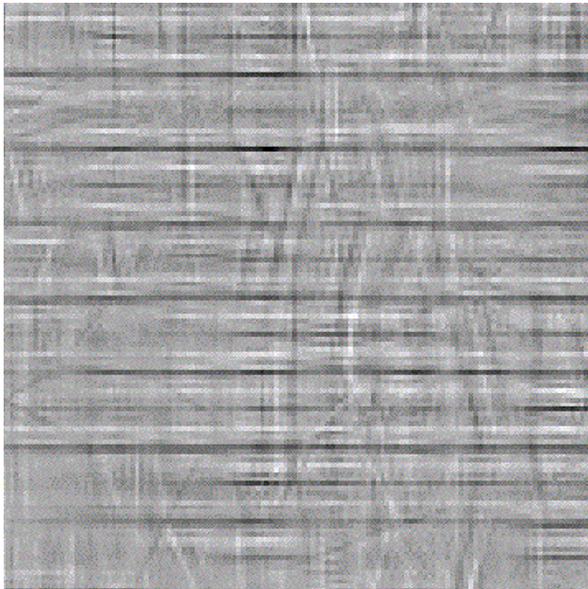
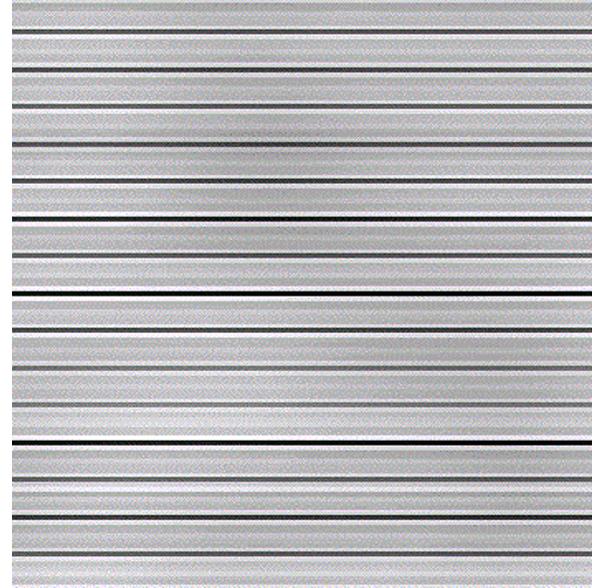
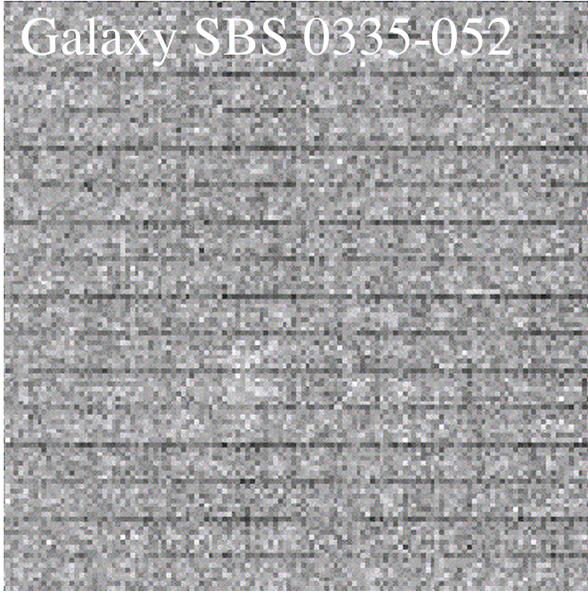
- Introduction: Signaux parcimonieux et compressibles
  - Principe de l'analyse en composantes morphologiques
  - Applications en astrophysique
-

# Exemple en Astrophysique



# Séparation Signal/Artefacts

Galaxy SBS 0335-052



# Dense cores form primarily in filaments

## Morphological Component Analysis:

*Herschel* Column density map

(P. Didelon based on  
Starck et al. 2003)

Cores

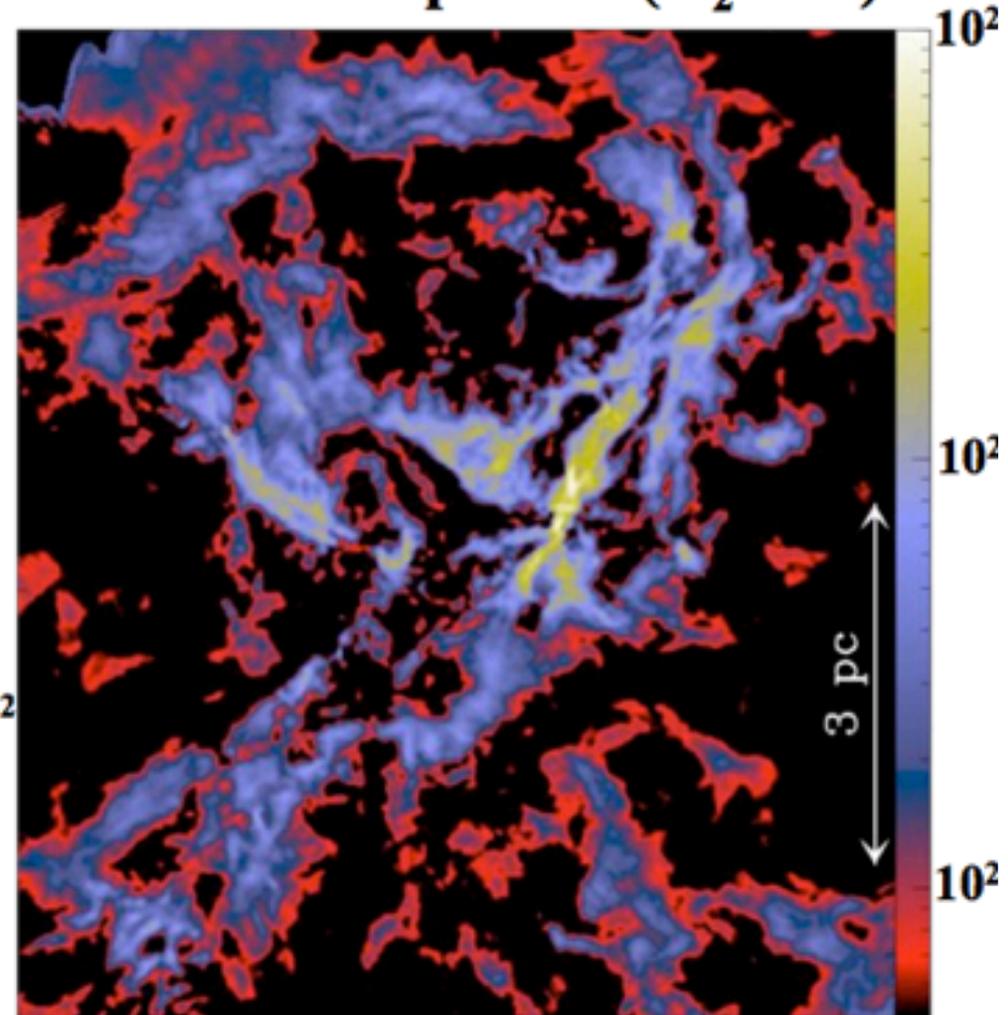
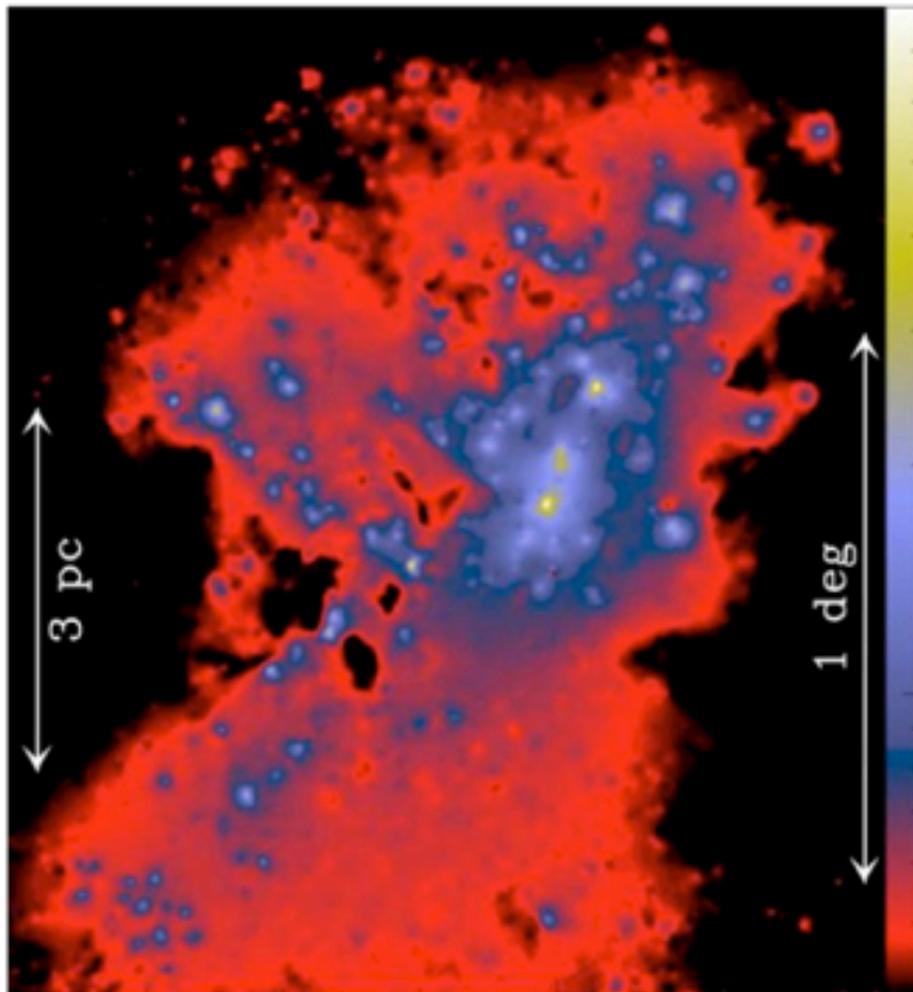
=

Filaments

Wavelet component ( $\text{H}_2/\text{cm}^2$ )

+

Curvelet component ( $\text{H}_2/\text{cm}^2$ )



# Nouvelles Formes de MCA

$$y = \mathbf{B}f + \mathbf{S}a + \mathbf{M}Ww + n \quad \text{with } f \in \mathcal{C}, a \in \mathcal{D}$$

$$\text{find } \hat{f} \in \underset{f \in \mathcal{C}, w \in \mathbb{R}^{N_w}, a \in \mathcal{D}}{\text{argmin}} \quad \gamma \|a\|_1 + \beta \|w\|_1 \quad \text{s.t. } \|y - (\mathbf{S}a + \mathbf{B}f + \mathbf{M}Ww)\|_{2,\Sigma} < \epsilon$$

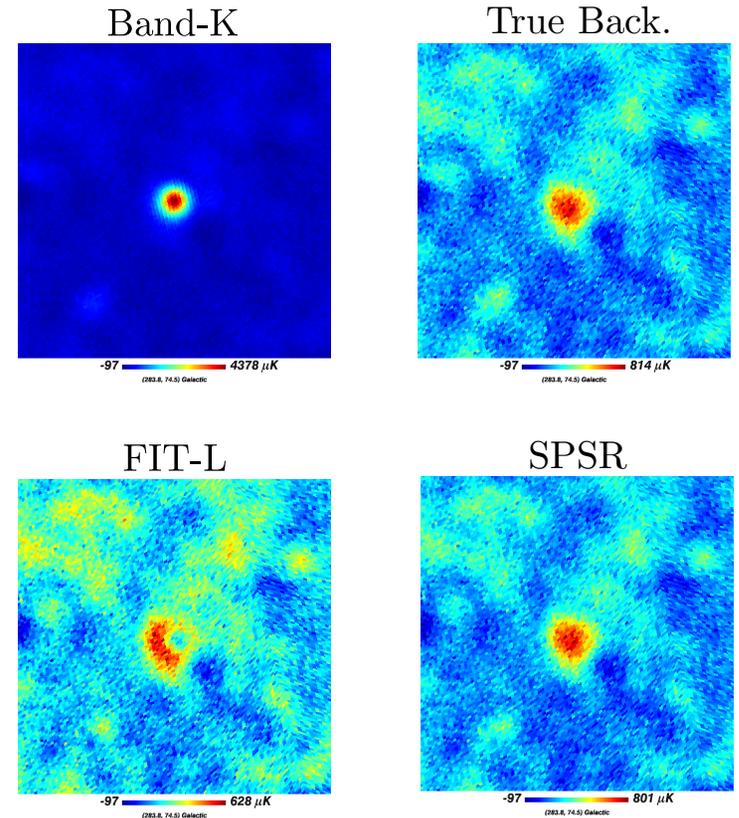
## Morphological Component Analysis with a Primal-Dual approach <sup>1</sup>

1- Choose  $(a^0, f^0, w^0, t^0) \in \mathbb{C}^{N_l} \times \mathbb{R}^{N_p} \times \mathbb{R}^{N_w} \times \mathbb{R}^{N_e}$  and  $\bar{a}^0 = a^0, \bar{f}^0 = f^0, \bar{w}^0 = w^0$ . Choose also the parameters  $\gamma, \beta$  and  $\tau, \sigma$  s.t.  $\tau\sigma < \frac{1}{3}$  (assuming normalized  $\|S\|_2 = \|MW\|_2 = \|B\|_2 = 1$ ).

2- Iterate ( $n \geq 0$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} r_d^n = t^n + \sigma \Sigma^{-1/2} (\mathbf{B}\bar{f}^n + \mathbf{S}\bar{a}^n + \mathbf{M}W\bar{w}^n - y) \\ t^{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{if } \|r_d^n\|_2 \leq \sigma\epsilon \\ (1 - \frac{\epsilon\sigma}{\|r_d^n\|_2}) r_d^n & \text{otherwise} \end{cases} \\ a^{n+1} = \mathcal{S}\mathcal{T}_{\tau\gamma} (P_{\mathcal{D}}(a^n - \tau \mathbf{S}^\dagger \Sigma^{-1/2 \dagger} t^{n+1})) \\ f^{n+1} = P_{\mathcal{C}} (f^n - \tau \mathbf{B}^\dagger \Sigma^{-1/2 \dagger} t^{n+1}) \\ w^{n+1} = \mathcal{S}\mathcal{T}_{\tau\beta} (w^n - \mathbf{W}^\dagger \mathbf{M} \Sigma^{-1/2 \dagger} t^{n+1}) \\ \bar{f}^{n+1} = 2f^{n+1} - f^n \\ \bar{a}^{n+1} = 2a^{n+1} - a^n \\ \bar{w}^{n+1} = 2w^{n+1} - w^n \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\text{with } [\mathcal{S}\mathcal{T}_{\tau\beta} x]_i = x_i \left[ 1 - \frac{\tau\beta}{|x_i|} \right]_+$$



# Conclusions

---

- MCA : nouvelle forme de représentation basée sur une décomposition en composantes parcimonieuses dans des dictionnaires différents
  - Décomposition morphologique souvent physique: interprétation directe des résultats. Applications sur des données réelles
  - Contraintes séparables dans un dictionnaire structuré (union de dictionnaires structurés): décomposition relativement rapide.
  - Conditions théoriques pour l'unicité de la décomposition, montrant l'importance de l'incohérence des sous-dictionnaires.
-