

La mesure et le cosmodétecteur

Jean-Christophe Pelhate & Christophe Boisseleau

Sciences à l'École – Stage COSMOS à l'École

CPPM de Marseille – 9-12 mai 2017

Sciences à l'École



académie
Versailles



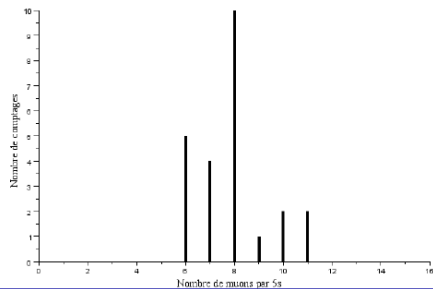
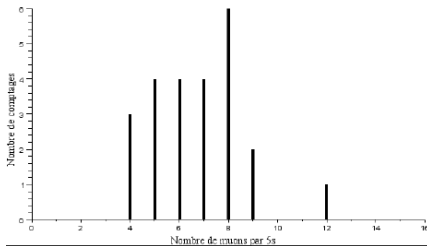
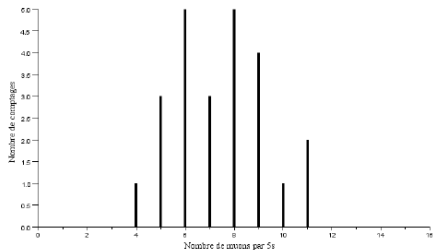
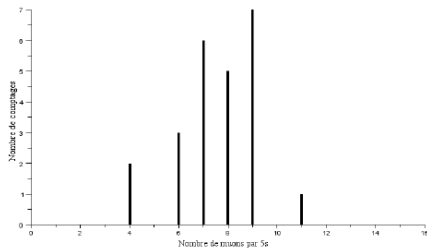
*A person who never made a mistake
never tried anything new*

A. Albert Einstein (1878 - 1955)

Plan de la présentation

- 1 Incertitude sur un comptage
- 2 Erreur systématique sur le cosmodétecteur
- 3 Exploitation d'un graphique par la méthode des moindres carrés
- 4 Méthode du χ^2
- 5 Bibliographie

■ Expérience réalisée 24 fois (temps 2 min par intervalle de 5 s)



- On considère un tirage ayant deux possibilités : l'une négative ($e = 0$), l'autre positive ($e = 1$)
- La probabilité, à chaque tirage, que celui-ci soit positif est p et qu'il soit négatif est $q = 1 - p$
- On appelle r le nombre de succès après N tirages aléatoires
- La probabilité $P_{N,p}$ d'obtenir r succès est modélisée par une distribution binomiale donnée par la relation suivante :

$$P_{N,p}(r) = C_N^r \cdot p^r \cdot q^{N-r} = \frac{N!}{r!(N-r)!} p^r (1-p)^{N-r}$$

- ▶ $P_{N,p}(r)$ représente la probabilité d'obtenir la valeur r lorsqu'il y a N tirages aléatoires, avec la probabilité p qu'à chaque tirage le résultat soit positif.
- ▶ La variance d'une telle loi est donnée par : $\sigma^2 = Np(1-p)$

Illustration : le jeu de pile ou face à 4 pièces

- On lance 4 pièces ($N = 4$) et on compte le nombre de face obtenus, r .
- Quelle est la probabilité d'obtenir les différentes valeurs possibles de $r = 0, 1, 2, 3, 4$?
- La probabilité d'obtenir face pour une pièce est $p = \frac{1}{2}$.
- On a alors :

$$P_{4, \frac{1}{2}}(r) = C_4^r \cdot p^r \cdot q^{4-r} = \frac{4!}{r!(4-r)!} \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

- Par exemple :

$$P_{4, \frac{1}{2}}(0) = \frac{4!}{0!(4-0)!} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0,0625$$

Application au cosmodétecteur

- On considère N comptage de durée Δt
- Pour un nombre x de muons détectés durant Δt , on considère p la probabilité d'avoir ces x muons.
- Cette probabilité n'est pas connue *a priori*, on est obligé de l'estimer :

$$\bar{p} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_i = \frac{n}{N} \text{ avec } e_i = 1 \text{ si le comptage est } x$$

- La variance estimée : $s_{\bar{p}}^2 = n(1 - \frac{n}{N})$ soit $s_{\bar{p}} = \sqrt{n(1 - \frac{n}{N})}$

Remarques

- si N est très grand, on a $s_{\bar{p}} \approx \sqrt{n}$
- si n est très grand, on tend vers une loi normale de moyenne

$$k = N\bar{p} \text{ et d'écart-type } s_{\bar{p}} = \sqrt{n(1 - \frac{n}{N})} \approx \sqrt{n}$$

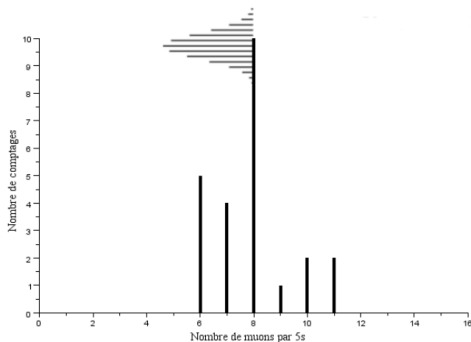
Exemple pour le bin 8 muons sur 5s

- On a ici $\bar{p} = \frac{10}{24}$ et $n = 10$.

- On trace la binomiale pour ce bin

$$P_{24, \frac{10}{24}}(r) = \frac{24!}{r!(24-r)!} \left(\frac{10}{24}\right)^r \left(1 - \frac{10}{24}\right)^{24-r}$$

- On a l'écart-type expérimental : $s \approx \sqrt{10} = 3, 3$



Plan de la présentation

- 1 Incertitude sur un comptage
- 2 Erreur systématique sur le cosmodétecteur
- 3 Exploitation d'un graphique par la méthode des moindres carrés
- 4 Méthode du χ^2
- 5 Bibliographie

Erreurs systématiques

- Sur le cosmodétecteur, comme sur n'importe quel appareil de mesure, il y a des sources d'erreurs systématiques.
- Ces erreurs sont traitées en post-traitement
- Pour le cosmodétecteur, il existe deux sources d'erreurs systématiques qui interviennent sur toutes les mesures :
 - ▶ l'efficacité des "plaques" (scintillateur+photomultiplicateur)
 - ▶ le temps mort de comptage

L'efficacité des plaques

- L'efficacité d'une "plaque" mesure la capacité qu'a celle-ci à détecter un muon qui passe effectivement dans le scintillateur
- Pour mesurer l'efficacité d'une plaque, on la place entre deux autres. Pour différentes tension d'alimentation du PM, on calcule le rapport $\frac{n_{123}}{n_{13}}$.

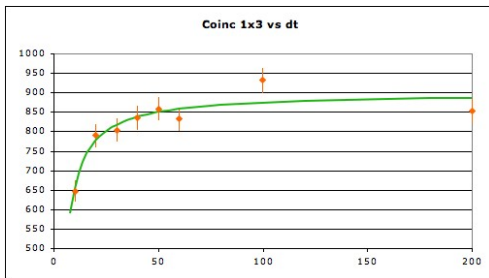
Application au cosmodétecteur

- On peut considérer que le cosmodétecteur à une efficacité de $e = 98,5\%$.
- Les valeurs sont comprises entre 98% et 99%. On peut considérer que l'on a une distribution rectangulaire de demi-largeur 0,5%
- L'incertitude-type est donc $u_e = \frac{1}{\sqrt{12}} = 0,29\%$
- On a alors l'efficacité $e = 98,50 \pm 0,29\%$.
- Il faut multiplier les résultats bruts du détecteur par le coefficient : $k_e = 1,015228 \pm 0,000030$
- Si on a deux détecteur en coïncidence, il faut mettre ce coefficient au carré.

- $n_{corr} = k_e^2 \cdot n_{brut}$ et $u_{n_{corr}} = n_{corr} \sqrt{\left(2 \frac{u_{k_e}}{k_e}\right)^2 + \left(\frac{u_{n_{brut}}}{n_{brut}}\right)^2}$

Temps mort

- Lorsque l'on trace la courbe des coïncidences entre deux scintillateurs, on constate que les comptages ne commencent pas au temps zero mais légèrement après, cela est dû à un temps mort.



- On peut lire sur la courbe suivante que le temps mort est de 3 s

Application au cosmodétecteur

- Par exemple, pour un temps de comptage de 200 s, il y a donc 1,5% du temps où l'appareil ne compte pas.
- Il faut donc multiplier les résultats par un coefficient $k_{t_{mort}} = 98,5\%$.
- Pour l'incertitude sur l'évaluation de ce temps mort, on peut prendre un intervalle compris entre 2,5 s et 3,5 s.
- On a alors une distribution rectangulaire comprise entre 2,5 s et 3,5 s.

- L'incertitude-type : $u_{k_{t_{mort}}} = \frac{1}{\sqrt{12}} = 0,14\%$

- $k_{t_{mort}} = 98,50 \pm 0,14\%$

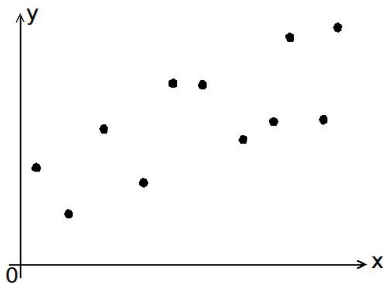
- $n_{corr2} = k_{t_{mort}} n_{corr}$ et

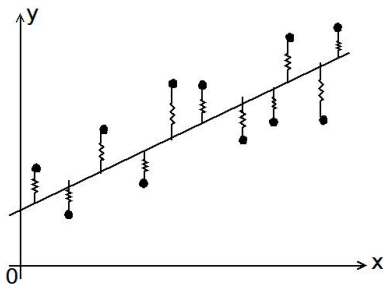
$$u_{n_{corr2}} = n_{corr2} \sqrt{\left(\frac{u_{k_{t_{mort}}}}{k_{t_{mort}}}\right)^2 + \left(\frac{u_{n_{corr}}}{n_{corr}}\right)^2}$$

Plan de la présentation

- 1 Incertitude sur un comptage
- 2 Erreur systématique sur le cosmodétecteur
- 3 Exploitation d'un graphique par la méthode des moindres carrés
- 4 Méthode du χ^2
- 5 Bibliographie

On réalise le mesurage d'un ensemble de couples de valeurs $\{x_i, y_i\}$.
On place alors sur un graphique l'ensemble des points expérimentaux de coordonnées $\{x_i, y_i\}$ obtenus.





- Imaginons que chaque point expérimental soit relié à une barre représentant la droite de régression linéaire par un ressort de raideur k et de longueur à vide nulle.
- La barre est alors en équilibre mécanique stable si son énergie potentielle élastique est minimale.
- Si on note L_i l'élongation du ressort associé au point (x_i, y_i) , l'énergie potentielle élastique de la barre est minimale si $\sum_i^N L_i^2$ est minimale

- La méthode des moindres carrés consiste donc à chercher l'équation de la droite $\hat{y} = \hat{a}x + \hat{b}$ par mis tous les $ax + b$ possibles, qui minimise la grandeur

$$C = \sum_i^N (y_i - \hat{y}_i)^2$$

- Cela revient alors à chercher les valeurs de a et b telles que :

$$\left(\frac{\partial C}{\partial a} \right)_{\hat{a}} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial C}{\partial b} \right)_{\hat{b}} = 0$$

Plan de la présentation

- 1 Incertitude sur un comptage
- 2 Erreur systématique sur le cosmodétecteur
- 3 Exploitation d'un graphique par la méthode des moindres carrés
- 4 Méthode du χ^2**
- 5 Bibliographie

- Soit un ensemble de n couples $\{(x_i, y_i)\}$ que l'on sait relier par une loi $y = f(x, \vec{\theta})$ avec $\vec{\theta} = \theta_1, \theta_2, \dots$ est l'ensemble des paramètres inconnus.
- L'ajustement de f aux données $\{(x_i, y_i)\}$ consiste à trouver la valeur des paramètres $\vec{\theta}$ qui correspondent le mieux aux données.
- On va créer une grandeur qui mesure l'accord entre les mesures et la courbe théorique
 - ▶ cette mesure va dépendre des paramètres $\vec{\theta}$
 - ▶ la valeur des paramètres donnant le meilleur accord sera choisie comme estimateur de ces paramètres

- Les paramètres optimaux devront minimiser la grandeur :

$$K^2(\vec{\theta}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - f(x_i, \vec{\theta})}{\sigma_i} \right)^2$$

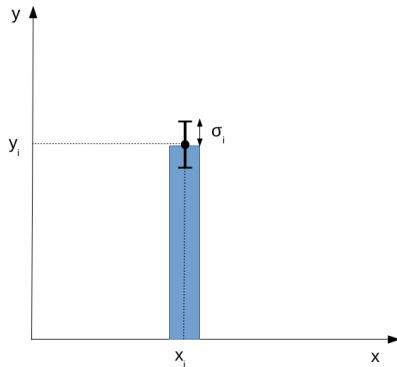
avec $\sigma_i = \sqrt{N_i}$

- Il faut résoudre par rapport aux paramètres $\vec{\theta}$ le système d'équations :

$$\frac{\partial K^2(\vec{\theta})}{\partial \vec{\theta}} = 0$$

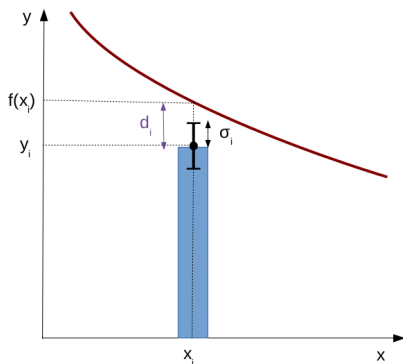
Signification qualitative

- Hypothèse : incertitudes ont des distributions normales. Dans ce cas chaque point de mesure suit une loi normale, alors la fonction à minimiser s'apparente à un test de χ^2



Signification qualitative

- Au niveau de chaque point expérimental, on considère la distance entre le point expérimental et le point du modèle.



- Le système ne peut généralement pas se résoudre analytiquement. Utilisation des algorithmes de minimisation numérique.
- L'estimateur de $\vec{\theta}$ est donné par la valeur $\hat{\vec{\theta}}$ qui minimise $K^2(\vec{\theta})$
- On alors $K_{min}^2 = K^2(\hat{\vec{\theta}})$ la valeur minimale de K^2
- La valeur K_{min}^2 doit être petite si la fonction ajustée décrit les données de manière satisfaisante
- Cette grandeur mesure donc la qualité de l'ajustement

Analyse de la pertinence de la modélisation

- K_{min}^2 est la réalisation d'une variable aléatoire suivant une loi de χ^2 à $\nu = N - p$ degré de liberté
- N est le nombre de mesures réalisées
- p est le nombre de paramètres du modèle (nombre de dimension du vecteur $\vec{\theta}$)
- $(N - p)$ représente le nombre de degrés de liberté de la modélisation
- Afin d'obtenir une grandeur dont on peut discuter de la valeur indépendamment du nombre de mesures réalisées, on définit alors :

$$K_{r\ min}^2 = \frac{K_{min}^2}{N - p}$$

Analyse de la pertinence de la modélisation

On peut interpréter qualitativement la valeur de $K_{r\ min}^2$ de la manière suivante :

- Si $K_{r\ min}^2 \gg 1$, la loi n'est pas validée. Cela peut être dû à une sous-estimation des incertitudes de mesures ou bien le type de modélisation choisi n'est pas correct.
- Si $K_{r\ min}^2 \approx 1$, la loi est validée. Bon accord entre la répartition des points expérimentaux et la droite de régression linéaire.
- Si $K_{r\ min}^2 \ll 1$, on ne peut pas conclure. Les incertitudes de mesures ont certainement été largement surestimées.

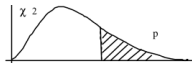
Analyse de la pertinence de la modélisation

- On peut définir la *p-value*, qui est la probabilité de faire un ajustement dont le résultat serait pire que celui observé. C'est donc la probabilité de trouver un K_{min}^2 plus grand que celui obtenu. Elle est donnée par la densité de probabilité f_{χ^2} de la loi du χ^2

- La p -value quantifie également la qualité de l'ajustement

$$p\text{-value} = \int_{K_{min}^2}^{+\infty} f_{\chi^2}(x; \nu) dx$$

les tables de données permettent de déterminer les p -values
connaissant K_{min}^2 ν

TABLE DU CHI-DEUX : $\chi^2(n)$ 

n	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
1	0.0158	0.0642	0.148	0.455	1.074	1.642	2.706	3.841	5.412	6.635
2	0.211	0.446	0.713	1.386	2.408	3.219	4.605	5.991	7.824	9.210
3	0.584	1.005	1.424	2.366	3.665	4.642	6.251	7.815	9.837	11.341
4	1.064	1.649	2.195	3.357	4.878	5.989	7.779	9.488	11.668	13.277
5	1.610	2.343	3.000	4.351	6.064	7.289	9.236	11.070	13.388	15.086
6	2.204	3.070	3.828	5.348	7.231	8.558	10.645	12.592	15.033	16.812
7	2.833	3.822	4.671	6.346	8.383	9.803	12.017	14.067	16.622	18.475
8	3.490	4.594	5.527	7.344	9.524	11.030	13.362	15.507	18.168	20.090
9	4.168	5.380	6.393	8.343	10.656	12.242	14.684	16.919	19.679	21.666
10	4.865	6.179	7.267	9.342	11.781	13.442	15.987	18.307	21.161	23.209
11	5.578	6.989	8.148	10.341	12.899	14.631	17.275	19.675	22.618	24.725
12	6.304	7.807	9.034	11.340	14.011	15.812	18.549	21.026	24.054	26.217
13	7.042	8.634	9.926	12.340	15.119	16.985	19.812	22.362	25.472	27.688
14	7.790	9.467	10.821	13.339	16.222	18.151	21.064	23.685	26.873	29.141
15	8.547	10.307	11.721	14.339	17.322	19.311	22.307	24.996	28.259	30.578
16	9.312	11.152	12.624	15.338	18.418	20.465	23.542	26.296	29.633	32.000
17	10.085	12.002	13.531	16.338	19.511	21.615	24.769	27.587	30.995	33.409
18	10.865	12.857	14.440	17.338	20.601	22.760	25.989	28.869	32.346	34.805
19	11.651	13.716	15.352	18.338	21.689	23.900	27.204	30.144	33.687	36.191
20	12.443	14.578	16.266	19.337	22.775	25.038	28.412	31.410	35.020	37.566
21	13.240	15.445	17.182	20.337	23.858	26.171	29.615	32.671	36.343	38.932
22	14.041	16.314	18.101	21.337	24.939	27.301	30.813	33.924	37.659	40.289
23	14.848	17.187	19.021	22.337	26.018	28.429	32.007	35.172	38.968	41.638

Introduction aux deux modèles

Écriture du χ^2

- Pour un ensemble de couples de valeurs $\{x_i, y_i\}$

- $$\chi_r^2 = \frac{1}{N - q} \sum_{i=1}^N \frac{(f(x_i) - y_i)^2}{\sigma_{y_i}^2}$$

- On considère les fluctuations sur y_i gaussienne et on prend $\sigma_{y_i} = \sqrt{y_i}$

- $$\chi_r^2 = \frac{1}{N - q} \sum_{i=1}^N \frac{(f(x_i) - y_i)^2}{y_i}$$

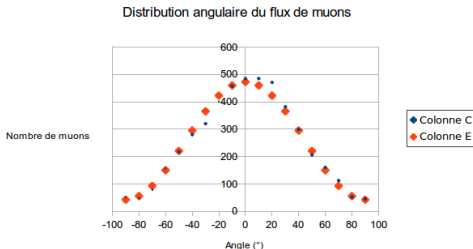
Distribution angulaire du flux de muons

Modèle retenu

- On utilise le modèle suivant : $N(\theta) = a \cdot \cos^2 \theta + b$
- Il y a deux paramètres à déterminer a, b

$$\chi_r^2 = \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N \frac{(a \cdot \cos^2 \theta + b - N_{exp}(\theta_i))^2}{N_{exp}(\theta_i)}$$

Exemple



Valeurs des paramètres

- $\chi_r^2 = 1,53$
- $b = 42,28$
- $a = 430,6$

Temps de vie du muon

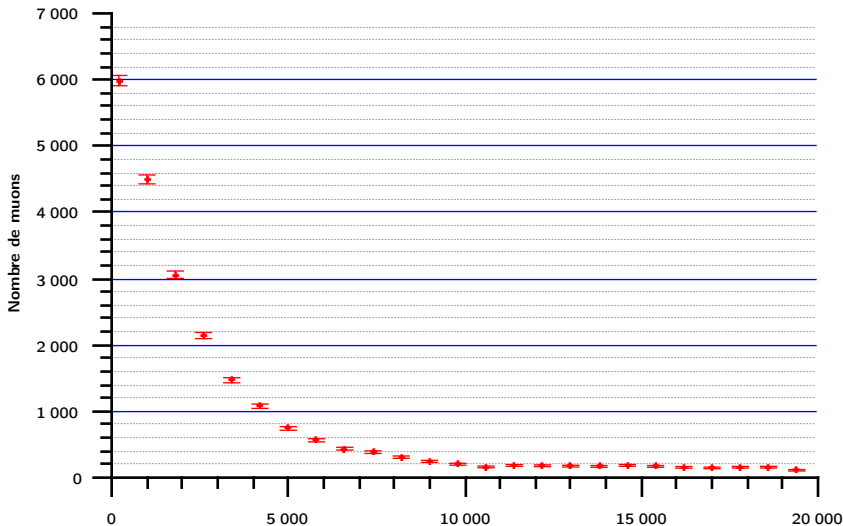
Modèle retenu

- On utilise le modèle suivant : $N(t) = N_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + b$
- Il y a trois paramètres à déterminer N_0, b, τ

$$\chi_r^2 = \frac{1}{N-3} \sum_{i=1}^N \frac{(N_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + b - N_{exp}(t_i))^2}{N_{exp}(t_i)}$$

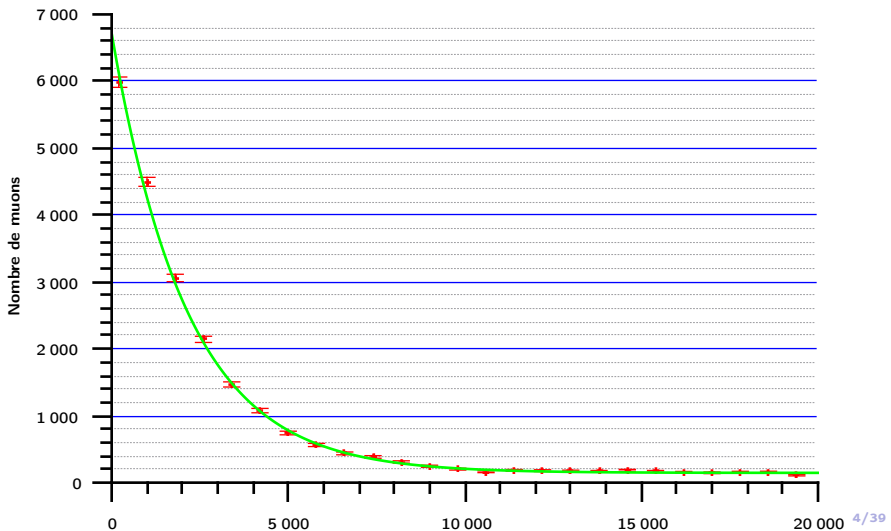
Avec un tableur

Nombre de muons en fonction du temps

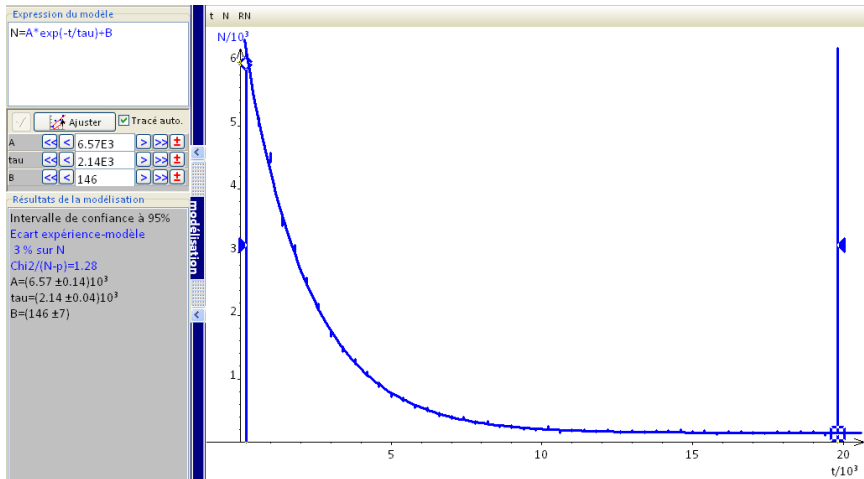


Avec un tableur

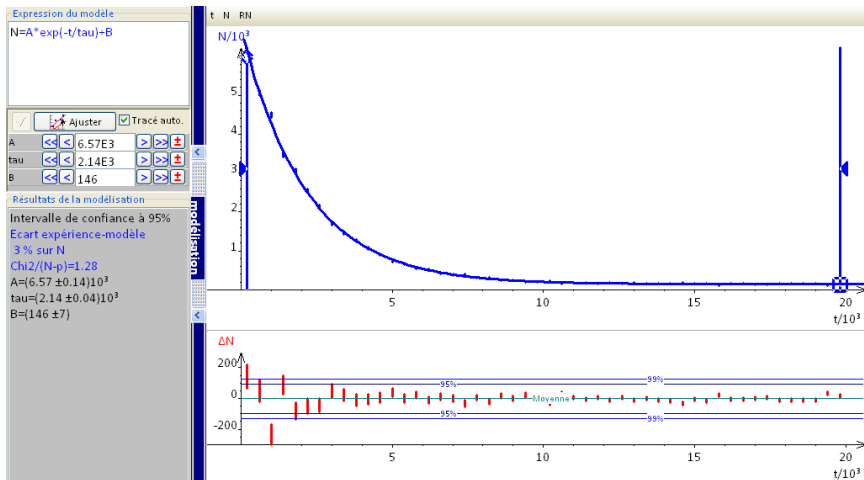
Nombre de muons en fonction du temps



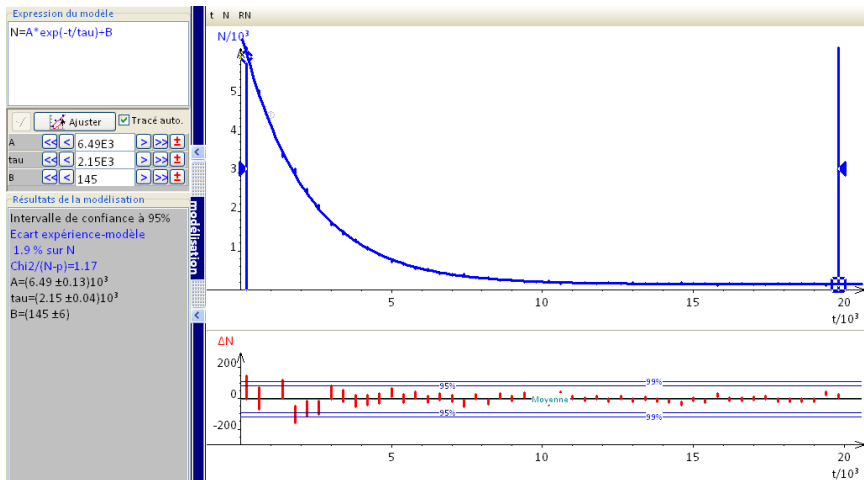
Avec Regressi



Avec Regressi



Avec Regressi



Conclusion

Le modèle retenu est : $N = A \cdot \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) + B$

- $\tau = 2,15 \pm 0.04 \mu s$
- $A = (6,49 \pm 0,13) \times 10^3$
- $B = 145 \pm 6$

L'incertitude sur τ est directement donnée par le logiciel (Regressi, par exemple) ou caculée par d'autres méthodes (Monte-carlo)

Plan de la présentation

- 1 Incertitude sur un comptage
- 2 Erreur systématique sur le cosmodétecteur
- 3 Exploitation d'un graphique par la méthode des moindres carrés
- 4 Méthode du χ^2
- 5 Bibliographie



D. Barchiesi.

Mesure physique et instrumentation.
Ellipses, 2010.



F.-X. Bally & J.-M. Berroir.

Incertitudes expérimentales.
<http://poisson.ens.fr/Ressources/incertitudes.pdf>, Polycopié de cours du centre de préparation interuniversitaire à l'agrégation de physique de Montrouge, 2008.



F.-X. Bally & J.-M. Berroir.

Incertitudes expérimentales.
Bulletin de l'Union des Physiciens, 928 :995–1019, Novembre 2010.



P. Bogaert.

Probabilités pour scientifiques et ingénieurs.
de Boeck, 2008.



F. Laffont & E. Mathieu C. Joffin.

Mesure et instrumentation.
Casteilla, 2012.



B. Clément.

Analyse de données en sciences expérimentales.
Dunod, 2012.



J. Collot.

Erreur, probabilité statistique.
<http://isnwww.in2p3.fr/atlas/cours/index.html>, Polycopié du cours de physique expérimentale des hautes énergies du DEA de Physique Théorique Rhône-Alpin, 2001.



Inspection générale.

Mesure et incertitudes.

http://media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/07/0/yceeGT_ressources_MathPC_Mesure_et_incertitudes_eduscol_214070.pdf, 2012.



J. Perdijon.

La mesure : histoire, science et philosophie.
Dunod, 2004.



K. Protassov.

Probabilités et incertitudes dans l'analyse des données expérimentales.
Presses Universitaires de Grenoble, 1999.



P. R. Bevington & D. K. Robinson.

Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences.
McGraw-Hill Higher Education, 2003.



G. L. Squires.

Practical physics.
Cambridge University Press, 1984.



J. R. Taylor.

An introduction to Error Analysis.
University Science Books, Sausalito, 1997.



A. Jardy & J. Vial.

Outils pour l'exploitation et l'expression des résultats de mesures physico-chimiques.
Document de formation d'un stage organisé par l'ESPCI et l'UPS, 2012.



A. Bernard & J-L Vidal.

Incertitudes.

<http://www.ac-grenoble.fr/disciplines/spc/file/doc/1STI2D/vidal/mesure.pdf>, Lycée des Catalans, Montélimar, académie de Grenoble, 2011.