

Génération de bruit en $1/f^\alpha$

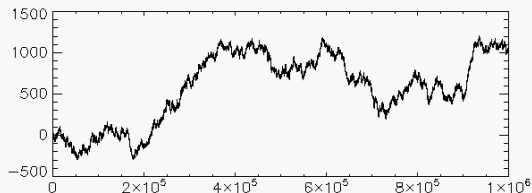
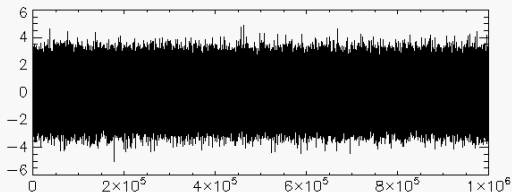
Stéphane Plaszczynski

LAL

11 octobre 2005

ckoi ?

processus aléatoire (stochastique) : $x(t)$ est une v.a



Auto-corrélation

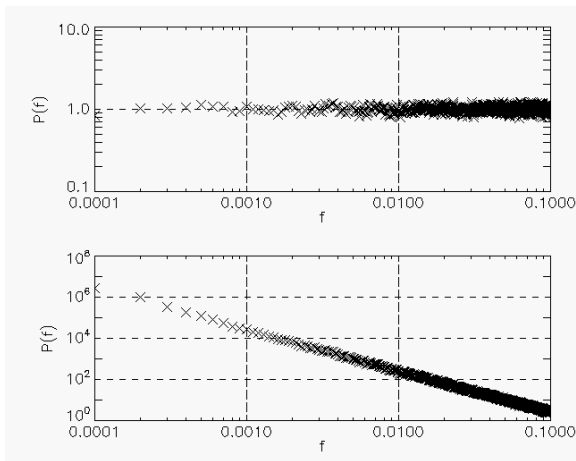
$$R_x(\tau) = E\{x(t)x(t - \tau)\}$$

Spectre de puissance

=TF(auto-correlation)

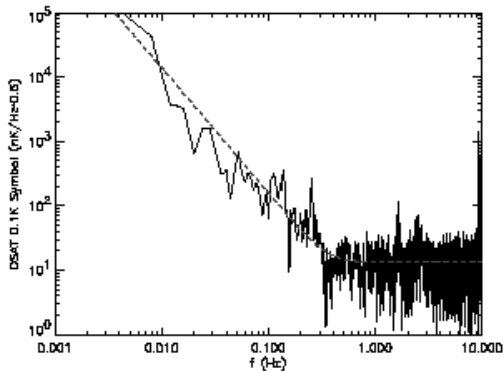
décrit l'énergie de la corrélation ("mémoire" du processus)

se calcule rapidement par FFT



Électronique

Bolometres de Planck-HFI



Géophysique

Tremblements de terre en 2000 :

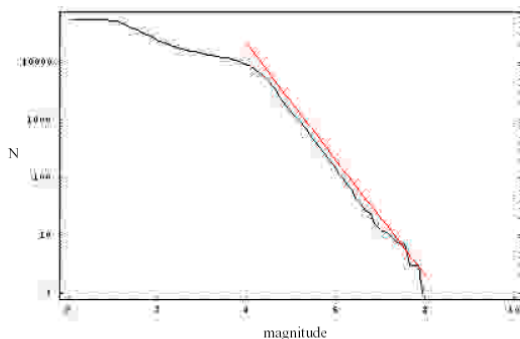


Figure 11: cumulative distribution N of the earthquakes worldwide for the year 2000 from the Berkeley database [50]: the red line has slope -1. Since the earthquake magnitude is a logarithmic measure of the energy released by the earthquake, this may be viewed as a log-log plot. Notice that the power law region has a limited extension, approximately 3 decades, i.e. considerably less than the power law region in resistor noise spectra.

Océanographie

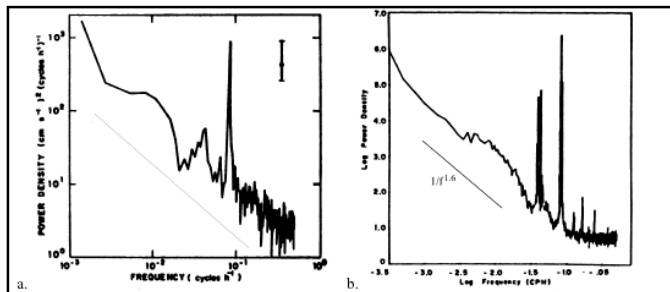


Figure 2: a. power spectrum of the east-west component of ocean current velocity [7]; the straight line shows the slope of a $1/f$ spectrum. b. sea level at Bermuda: this is $1/f^\alpha$ spectrum with $\alpha \approx 1.6$ [8].

Musique

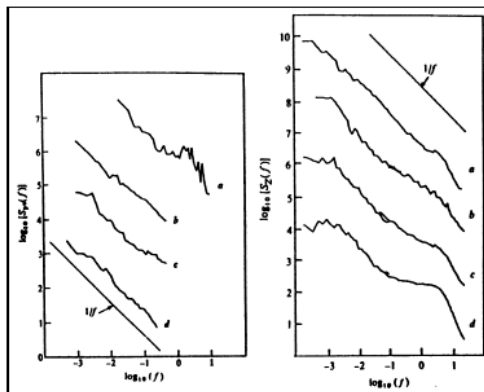


Figure 3: Loudness (left) and pitch (right) fluctuation spectra vs. frequency (Hz) (log-log scale), for a. Scott Joplin piano rags; b. classical radio station; c. rock station; d. news-and-talk station. (from ref. [10]).

Psychologie !

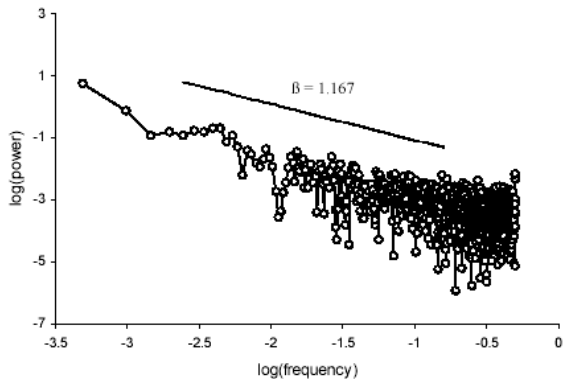


Figure 3: Example graphical result of the spectral analysis: double logarithmic plot of power against frequency (Participant 1, Global Self-Esteem; see Figure 2, upper panel).

Mais aussi...

- fluctuation de tension dans les tubes a vide, transistors, fréquence des oscillateurs a quartz
- marchés financiers
- fréquence cardiaque, taux d'insuline chez les diabétiques
- trafic routier,internet...
- marée,pluie...
- sociologie

mathématique, physique, biologique, social

Généralement $1 < \alpha < 2$

Questions passionnantes (non traitées)

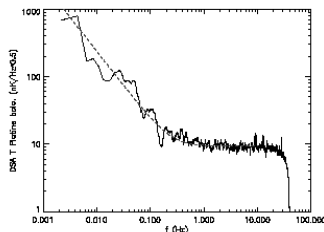
- le bruit est-il stationnaire ?
- a-t-il une limite a basse fréquence ?
- raison de son universalité (manifestation fractale, produit de v.a ?) ?

Questions passionnantes (non traitées)

- le bruit est-il stationnaire ?
- a-t-il une limite a basse fréquence ?
- raison de son universalité (manifestation fractale, produit de v.a ?) ?
- simulation de séquences de ce bruit

Simulation pour Planck

- HFI : inertie thermique des bolomètres : $1/f^2$
- LFI : électronique des radiomètres : $1/f^\alpha$ $\alpha \simeq 1.7$
- systèmes de feedback : bruit blanc **en dessous** de $f_0 \simeq 10^{-5} \text{ Hz}$: NB : rend le bruit stationnaire.
- design : bruit blanc **au dessus** de $f_k \simeq 10^{-2} \text{ Hz}$



$$f_{\text{sample}} \simeq 200 \text{ Hz} \rightarrow 10^9 / \text{an}$$

on cherche un algorithme **par récurrence et rapide**. On suppose qu'on ne connaît pas a priori la taille de l'échantillon.

Sur le marché

1. génération par matrice d'auto-correlation : trop large

Sur le marché

1. génération par matrice d'auto-correlation : trop large
2. FFT : taille fixe

Sur le marché

1. génération par matrice d'auto-correlation : trop large
2. FFT : taille fixe
3. **filtrage numérique** d'un géné blanc
 - 3.1 MA : $y_k = a_0 x_k + a_1 x_{k-1} + \dots$
 - 3.2 AR : $y_k + a_1 y_{k-1} + \dots = x_k$

Sur le marché

1. génération par matrice d'auto-correlation : trop large
2. FFT : taille fixe
3. **filtrage numérique** d'un géné blanc
 - 3.1 MA : $y_k = a_0 x_k + a_1 x_{k-1} + \dots$
 - 3.2 AR : $y_k + a_1 y_{k-1} + \dots = x_k$
4. approximation $\sum 1/f^2$

Sur le marché

1. génération par matrice d'auto-correlation : trop large
2. FFT : taille fixe
3. **filtrage numérique** d'un géné blanc
 - 3.1 MA : $y_k = a_0 x_k + a_1 x_{k-1} + \dots$
 - 3.2 AR : $y_k + a_1 y_{k-1} + \dots = x_k$
4. approximation $\sum 1/f^2$
5. invariance d'échelle : ondelettes, fractales...

Filtrage d'un bruit blanc

x tirage gaussien blanc $H(j\omega) \rightarrow y$:

$$S_y(\omega) = |H(j\omega)|^2 \underbrace{S_x(\omega)}_{=1}$$

On veut réaliser le filtre :

$$H(j\omega) = 1/(j\omega)^{\alpha/2}$$

$$\alpha = 2 : H(j\omega) = 1/(j\omega) \quad (\text{intégration}) \quad (1)$$

$$\alpha = 1 : H(j\omega) = 1/(j\omega)^{1/2} \quad (\text{demi-intégration !}) \quad (2)$$

intégrer " $\alpha/2$ fois" du bruit blanc...

Transformée en z

$$\{x_i\}_{i=0,1,\dots} \xrightarrow{z} X(z^{-1}) = x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + \dots$$

- linéaire
- décalage : $\{x_{i-k}\} \xrightarrow{z} z^{-k} X(z^{-1})$
- somme : $\{\sum_{k=1}^i x_k\} \xrightarrow{z} \frac{X(z^{-1})}{1 - z^{-1}}$
- convolution : $\{\sum_{k=0}^i x_k y_{i-k}\} \xrightarrow{z} X(z^{-1}) Y(z^{-1})$:

signal $x(t)$ échantillonné : $x_i = x(iT)$

$$u(t) \xrightarrow{z} 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$
$$e^{\omega t} u(t) \xrightarrow{z} \sum_i (e^{\omega T} z^{-1})^i = \frac{1}{1 - e^{\omega T} z^{-1}}$$

$1/f^2$ = marche aléatoire

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

$$h(t) = u(t)$$

$$h_i = h(iT) = 1, 1, \dots \xrightarrow{z} H(z^{-1}) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

x tirage blanc gaussien :

$$Y(z^{-1}) = \frac{X(z^{-1})}{1 - z^{-1}} \rightarrow y_i = \sum_{k=0}^i x_i \quad \text{marche aléatoire (mémoire infinie)}$$

ou :

$$Y(z^{-1}) - z^{-1}Y(z^{-1}) = X(z^{-1})$$

$$y_k = x_k + y_{k-1}$$

"Blanchiment" sous ω_0

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{\omega_0^2}{\omega^2 + \omega_0^2} \rightarrow H(j\omega) = \frac{\omega_0}{j\omega + \omega_0}$$

(filtre passe-bas)

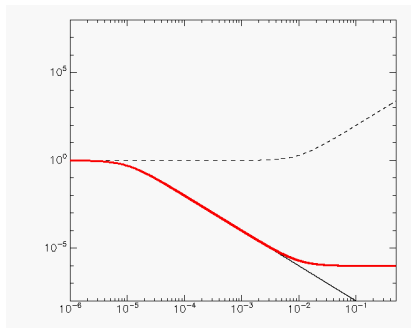
$$TF^{-1} \rightarrow h(t) = \omega_0 e^{-\omega_0 t} \xrightarrow{z} H(z^{-1}) = \frac{1}{1 - e^{-\omega_0 T} z^{-1}}$$

Transformation de x (tirage blanc) : $H(z^{-1}) = \frac{Y(z^{-1})}{X(z^{-1})}$

$$Y(z^{-1}) - e^{\omega_0 T} z^{-1} Y(z^{-1}) = X(z^{-1})$$

$$y_k = x_k + e^{-\omega_0 T} y_{k-1}$$

Blanchiment au dessus de ω_k



$$|H(j\omega)|^2 = \frac{\omega_0^2}{\omega^2 + \omega_0^2} \frac{\omega^2 + \omega_k^2}{\omega_k^2}$$

$$H(j\omega) \propto \frac{j\omega + \omega_k}{j\omega + \omega_0}$$

$$H(z^{-1}) \propto \frac{1 - e^{-\omega_k T} z^{-1}}{1 - e^{-\omega_0 T} z^{-1}}$$

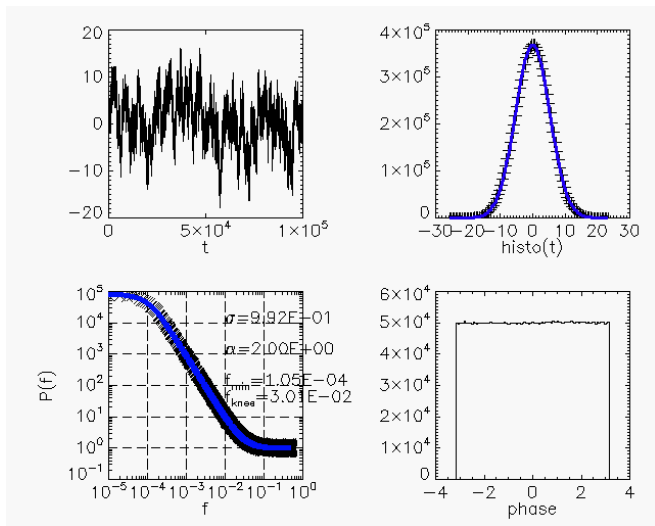
x tirage blanc : $H(z^{-1}) = \frac{Y(z^{-1})}{X(z^{-1})}$

$$Y(z^{-1}) - e^{\omega_0 T} z^{-1} Y(z^{-1}) = X(z^{-1}) - e^{\omega_k T} z^{-1} X(z^{-1})$$

$$y_k = x_k - e^{-\omega_k T} x_{k-1} + e^{-\omega_0 T} y_{k-1}$$

(un peu mieux avec transformées en w)

Vérification



CPU (ccali) : 2.1s/10M : \simeq tirage gaussien : optimal

$1/f^\alpha$: fonction de transfert ? I

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{\omega^\alpha} \rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^{\alpha/2}}$$
$$\rightarrow h(t) \propto \frac{1}{t^\beta}$$

avec $\beta = 1 - \frac{\alpha}{2}$: $0 < \alpha < 2 \rightarrow 0 < \beta < 1$

TZ :

$$H(z^{-1}) = \sum_j h(jT)z^{-j} \propto \sum_j \frac{z^{-j}}{j^\beta}$$

$1/f^\alpha$: fonction de transfert ? II

ne se factorise pas :

$$\begin{aligned} Y(z^{-1}) &= H(z^{-1})X(z^{-1}) = \left(\sum_j \frac{z^{-j}}{j^\beta} \right) \left(\sum_i x_i z^{-i} \right) \\ &= \sum_k y_k z^{-k} \end{aligned}$$

convolution explicite :

$$y_k \propto \sum_{i=0}^k \frac{x_{k-i}}{i^\beta}$$

NB : Integration fractionnelle = $y(t) \propto \int_0^t (t - \tau)^{\alpha/2-1} x(\tau) d\tau$

1. pb en $i = 0$
2. filtre MA
3. on doit garder tous les tirages

Mieux

Kasdin, *PROC-IEEE* vol83 (1995)

$$H(z^{-1}) = \frac{1}{(1 - z^{-1})^{\alpha/2}}$$

Theorem

$$H(z^{-1})H(z)|_{z \rightarrow e^{j\omega T}} = |H^*(j\omega)|^2$$

$$H(z^{-1})H(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})^{\alpha/2}} \frac{1}{(1 - z)^{\alpha/2}} = \frac{1}{[2 - (z + z^{-1})]^{\alpha/2}}$$

$$z \rightarrow e^{j\omega T} : |H^*(j\omega)|^2 \propto \frac{1}{\sin^\alpha \omega T/2} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega^\alpha}$$

1. guérit le pb en 0
2. permet la construction d'un filtre AR

Filtre MA

$$H(z^{-1}) = \frac{Y(z^{-1})}{X(z^{-1})} = \frac{1}{(1 - z^{-1})^{\alpha/2}}$$

$$Y(z^{-1}) = (1 - z^{-1})^{-\alpha/2} X(z^{-1})$$

Développement en série $(1 - z^{-1})^{-\alpha/2} = \sum_k a_k z^{-k}$:

$$Y(z^{-1}) = \sum_k a_k z^{-k} X(z^{-1})$$

$$y_n = x_n + \sum_{k=1}^n a_k x_{n-k}$$

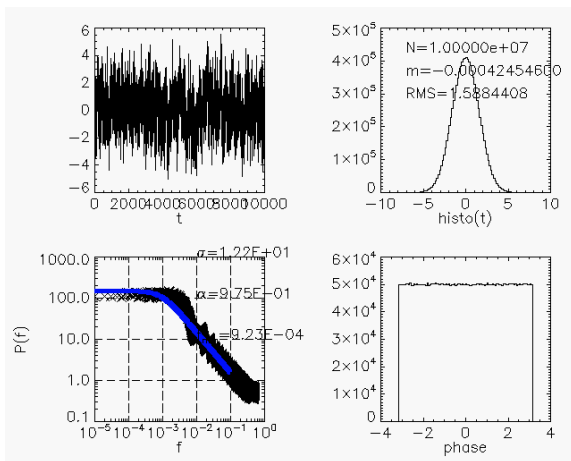
pb : il faut garder tous les tirages...

$$a_k \rightarrow k^{-\beta} \quad (\alpha = 1 : b_k \propto 1/\sqrt{k})$$

Filtre MA : résultats

implémentation avec FIFO fixe : $y_n = x_n + \sum_{k=1}^{N_{buff}} a_k x_{n-k}$

$N_{buff} = 100$:



Filtre AR

$$H(z^{-1}) = \frac{Y(z^{-1})}{X(z^{-1})} = \frac{1}{(1 - z^{-1})^{\alpha/2}}$$
$$\rightarrow Y(z^{-1})(1 - z^{-1})^{\alpha/2} = X(z^{-1})$$

Développement en série $(1 - z^{-1})^{\alpha/2} = \sum_k b_k z^{-k}$:

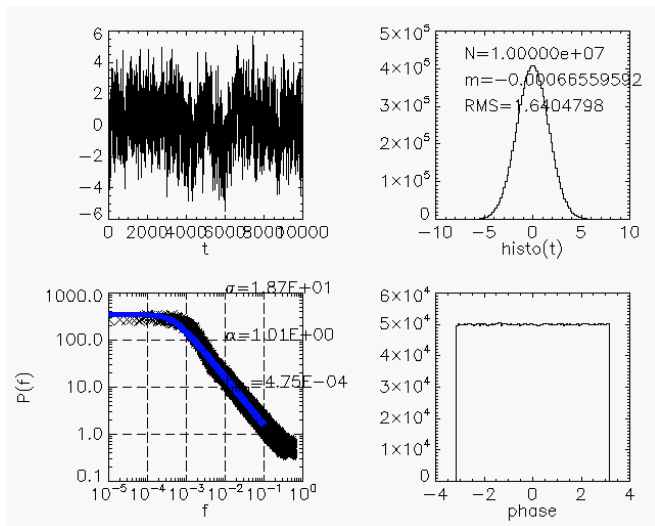
$$X(z^{-1}) = \sum_k b_k Y(z^{-1}) z^{-k}$$

$$y_k + \sum_{i=1}^k b_i y_{k-i} = x_k$$

$$b_k \rightarrow k^{-(1+\alpha/2)} \quad (\alpha = 1 : b_k \propto 1/k^{3/2})$$

Filtre AR : résultats

$$N_{buff} = 100$$



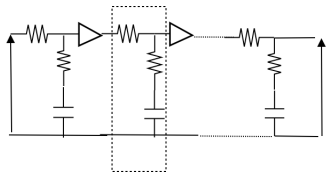
Conclusions ARMA

1. mathématiquement correct
2. trop lent pour $\omega_0 \ll \omega_k$ (on doit garder $\simeq 1/\omega_0 T$ termes)

Méthode approximative

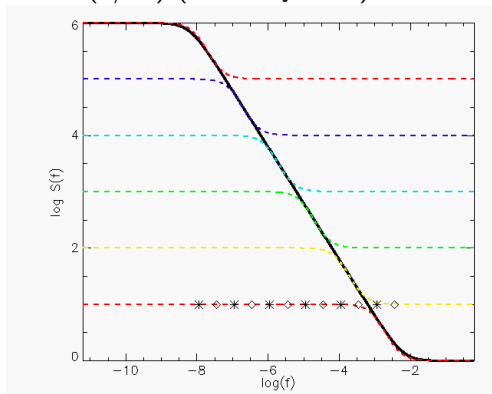
comportement en $1/f$ apparent :

somme de processus de relaxations ($1/f^2$) (Schottky,1926)



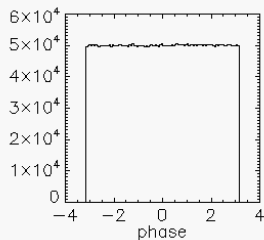
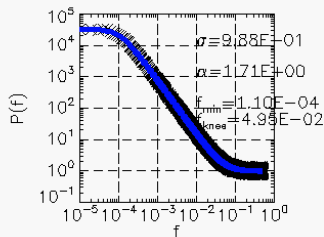
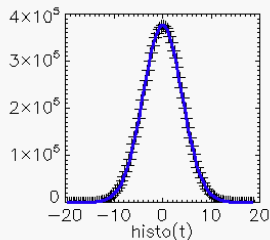
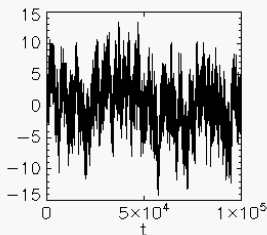
$$\dots \frac{j\omega + z_i}{j\omega + p_i} \dots$$

1 pole/décade suffisant
pour une précision de 5%



Keshner, *PROC-IEE*, vol-70 (1982)

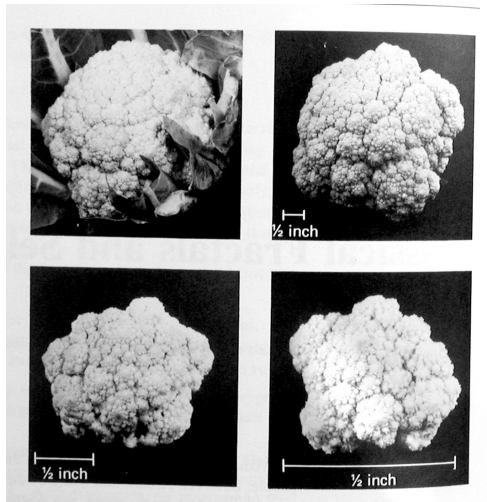
Somme de processus en $1/f^2$: *resultats*



CPU (ccali) : 3.7s/10M : $\simeq 1.5 \times$ gaussien : excellent

Invariance d'échelle

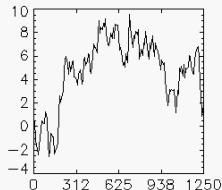
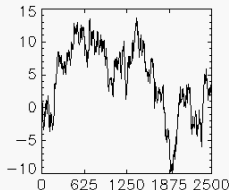
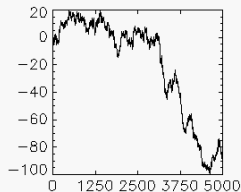
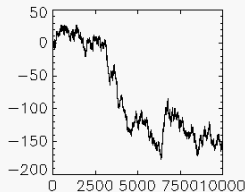
Phénomènes sans échelle *auto-similaires* :



Le bruit en $1/f^\alpha$ est un chou-fleur

ex $1/f^2$

$$\frac{X(2t)}{\sqrt{2}}$$



$\forall r \frac{X(rt)}{r^H}$ statistiquement indistinguables.

Bruit Brownien fractionnaire

Bruit Brownien ($1/f^2$)

1. $X(0) = 0$
2. $X(t_i) - X(t_j)$: gaussienne de variance $= |t_i - t_j|$
3. $X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), \dots$ sont indépendants

Mandelbrot :

Bruit Brownien fractionnaire ($1/f^\alpha$)

1. $X(0) = 0$
2. $X(t_i) - X(t_j)$: gaussienne de variance $= |t_i - t_j|^{\alpha-1}$
3. $X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), \dots$ sont indépendants
4. *auto-similaire* : $X(rt)/r^H$ avec $\alpha = 2H + 1$ invariant

Construction fractale

$$X(0) = 0$$

$$X(1) \in N(0, \sigma)$$

$$X\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(X(0) + X(1)) + \Delta_1$$

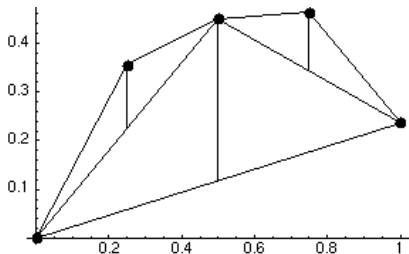
$$X\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}(X(0) + X\left(\frac{1}{2}\right) + \Delta_2)$$

$$X\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}(X\left(\frac{1}{2}\right) + X(1)) + \Delta_2$$

...

$$\Delta_n^2 = N\left(0, \frac{1}{(2^H)^{n+1}} \sigma^2\right)$$

Mais il faut connaître a-priori la taille

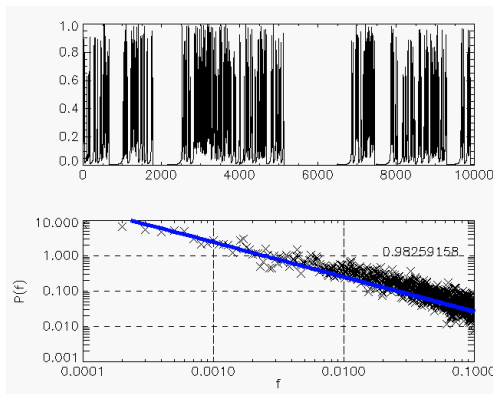
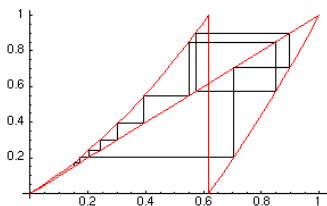


Fonctions logistiques

Manneville, *J. Phys* 41 (1980) :

$$f(x) = x_{n+1} = x_n + x_n^2 (\text{mod} 1)$$

Le retour des intermittents :



génération **directe** de bruit en $1/f$ (non Gaussien)
 en sommer $\simeq 100$ pour récupérer la gaussianité

Conclusions

- généré en $1/f^2$ optimal
- généré en $1/f^\alpha$ ($0 < \alpha < 2$) : meilleurs sur le marché
- si la taille de l'échantillon connue : méthode fractale optimale
- $\alpha > 2$ par fonction logistique : à creuser
- preprint : <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0510081>
- le code :
http://planck.lal.in2p3.fr/article.php3?id_article=8
- bruit en $1/f$:
<http://www.nslj-genetics.org/wli/1fnoise/index.html>

réalisé avec L^AT_EX/Beamer