La relativité à l’ordre *V*/*c*

MC25 Histoire de la physique

Congrès SFP 2023 (150 ans)

Paris, Cité des sciences et de l’industrie, jeudi 6 juillet 2023

Christian BRACCO,
Syrte, observatoire de Paris
Inspé de Nice, Université Côte d’Azur

« Des exemples similaires [à l'induction de Lorentz et de Neumann], tout comme l'essai infructueux de détecter le mouvement de la Terre relativement au “medium de la lumière”, nous amène à la supposition que non seulement en mécanique, mais aussi en électrodynamique, aucune propriété des faits observés ne correspond au concept de repos absolu ; et que dans tous les systèmes de coordonnées où les équations de la mécanique sont vraies, les équations électrodynamiques et optiques équivalentes sont également vraies, comme il a déjà été montré par l'approximation au premier ordre des grandeurs [en V/c] »

Électrodynamique des corps en mouvement,
Albert Einstein, juin 1905.

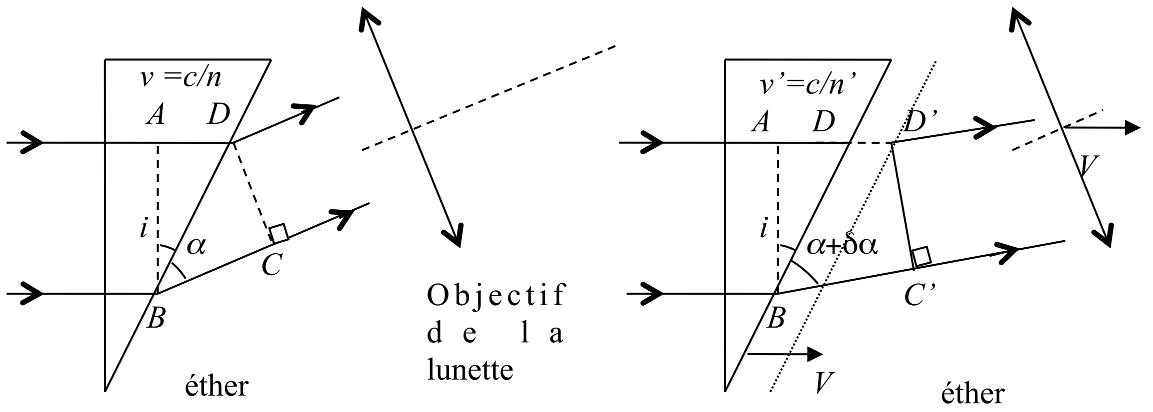
La formule d'entraînement de Fresnel (1818) – La démonstration de Poincaré dans son cours (1889)

Lettre à Arago, septembre 1818. Fresnel fait remarquer que si la lumière sort du prisme en B, elle n'en sortira pas en D quand le prisme est en mouvement à la vitesse V dans l'éther, mais en D'. L'angle des rayons à la sortie du prisme est modifié d'une quantité exactement compensée par l'effet d'aberration dû au mouvement de l'observateur terrestre. Il faut pour cela que la vitesse de la lumière dans l'éther, se propageant dans le prisme en mouvement, soit :

$$\boxed{v = c/n + V\left(1 - 1/n^2\right)}$$

(Vérification par Fizeau en 1851)

Fresnel conclut que « le mouvement de notre globe ne doit avoir aucune influence sensible sur la réfraction apparente ».



Poincaré déduit en 1889 de la formule de Fresnel (« entraînement partiel des ondes ») que les durées du temps de propagation de la lumière dans le milieu réfringent en mouvement (T durée dans l'éther) et au repos (T') sont :

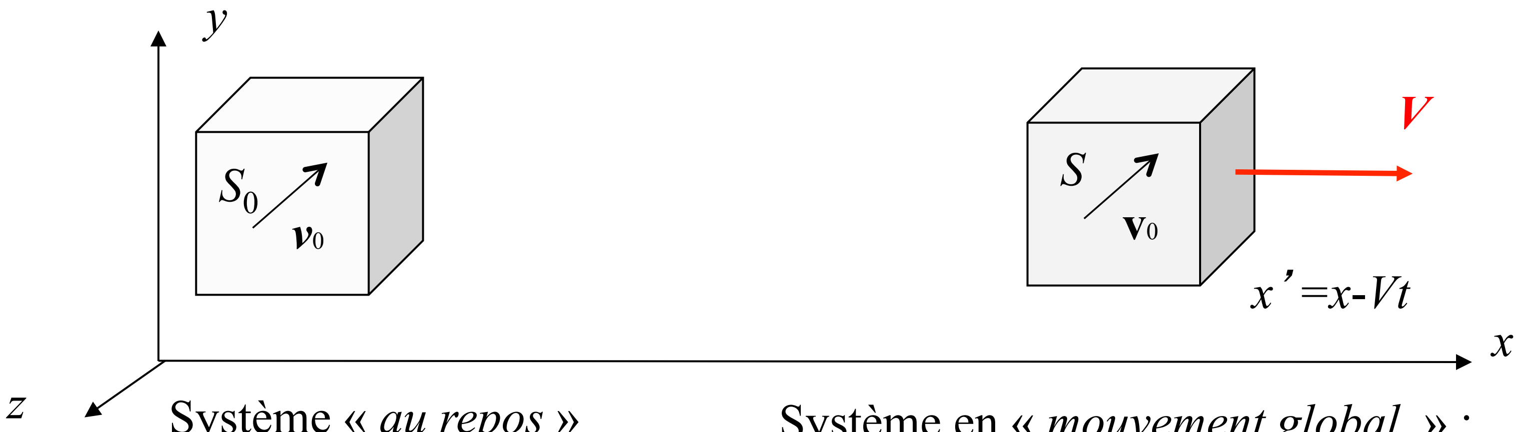
$$T' = T + \frac{VA'B'}{c^2} \qquad \left(A'B' = x\right)$$

« Une conséquence importante de la formule précédente est que les lois de la réflexion et de la réfraction, les phénomènes d'interférences ne sont pas affectés par le mouvement de la Terre ».

« En un mot les phénomènes optiques ne peuvent mettre en évidence que des mouvements relatifs par rapport à l'observateur de la source lumineuse et de la matière pondérable [PMR] ».

H. A. Lorentz 1895 (*Versuch*) : diélectriques en mouvement et « *principe des états correspondants* ».

Après que la lumière est devenue une onde électromagnétique avec Maxwell à la fin du XIX^e siècle, la problématique de Fresnel-Arago devient celle de l'électrodynamique des corps en mouvement.



Système « *au repos* »
dans l'éther : v, ρ, E, B …

Système en « *mouvement global* » :
$\vec{v}' = \vec{v} + \vec{V},\ \rho' = \rho$ (boost galiléen); $\vec{E}, \vec{B}$?

Lorentz cherche un changement de variables x', y', z', t', E', B' afin de résoudre les équations de Maxwell pour le système S en faisant en sorte que dans les nouvelles variables, elles ressemblent si possible à celles pour S_0, ce qui expliquerait l'impossibilité de détecter le mouvement « absolu » de la Terre par rapport à l'éther par des expériences optiques, et plus généralement électromagnétiques, au premier ordre en V/c). Il trouve :

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x - Vt \\ t' &= t - \boxed{Vx/c^2} \end{aligned}}$$

t' temps local
(variable fictive pour Lorentz)

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}$$
$$\vec{B}' = \vec{B} - \boxed{\vec{V} \wedge \vec{E} / c^2}$$

Lorentz, 1915 : « simples grandeurs auxiliaires dont l'introduction n'est qu'un artifice mathématique […] la variable *t'* ne pouvait être appelée le temps dans le même sens que la variable *t* ».

Poincaré 1895 : À propos de la théorie de M. Larmor, *Éclairage électrique*,
4 articles : vol. 3, 5-13, 285-295 ; vol. 5 (1895), 5-14, 385-392 entre avril et novembre

La théorie de Lorentz de 1892, avec des particules matérielles portant la charge électrique, libres de se déplacer dans l'éther, présente certains avantages sur d'autres théories (vérification de la formule de Fresnel et, par essence, de la conservation de la charge électrique).

Mais : « Malheureusement il reste une difficulté grave : il n'y a plus égalité entre l'action et la réaction [PRN] » [« L' objection » de Poincaré].

« […] l'impossibilité de mettre en évidence un mouvement relatif de la matière par rapport à l'éther [PMR] ; et l'égalité qui a sans doute lieu entre l'action et la réaction [PRN] sans tenir compte de l'action de la matière sur l'éther, sont deux faits dont la connexité semble évidente. Peut-être les deux lacunes seront-elles comblées en même temps ».

Poincaré, *Électricité et Optique*, seconde édition de 1901 cours de 1898-99)

À partir de l'invariance des équations de l'électromagnétisme au premier ordre en V/c (Lorentz 1895), Poincaré démontre le « théorème » selon lequel : « *Le mouvement de la Terre n'affecte pas les phénomènes optiques si les termes en carré de l'aberration* [V^2/c^2] *sont négligés* » et écrit les transformations des densités de charge, de courant et de force

$$\rho' = \rho - \vec{V}.\vec{j}/c^2, \quad \vec{j}' = \vec{j} - \rho\vec{V}, \quad \vec{f}' = \vec{f} - \left(\vec{j}.\vec{E}\right)\vec{V}/c^2$$

Puissance J fournie aux charges
Force de Liénard

H. Poincaré, La théorie de Lorentz et le principe de réaction, *Arch. Néerl. Sci. Ex. et Nat.* vol. 5, (décembre 1900)

« Rappelons d'abord rapidement le calcul par lequel on établit que dans la théorie de Lorentz le principe de l'égalité de l'action et de la réaction [PRN] n'est plus vrai, du moins quand on veut l'appliquer à la matière seule »

Poincaré part de la force de Lorentz

$$\vec{F} = \int \left(\rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B} \right) d\tau$$

Utilisant les quatre éqs. de Maxwell, les théorèmes usuels d'intégration, puis étendant le domaine d'intégration à l'infini, faisant ainsi disparaître ces termes de surface, Poincaré obtient l'expression de la force subie par les charges à l'intérieur du volume (non nulle en régime variable) :

$$\vec{F} = -\frac{d}{dt} \int \varepsilon_0 \left(\vec{E} \wedge \vec{B} \right) d\tau$$

Par analogie avec $\vec{F} = d\vec{p}/dt$, Poincaré introduit la qdm $\vec{p}_{em} = \varepsilon_0 \left(\vec{E} \wedge \vec{B} \right)$ qui entre dans le bilan [matière + rayonnement] :

$$M\vec{v} + \varepsilon_0 \left(\vec{E} \wedge \vec{B} \right) = \vec{C}$$

Il l'identifie « au *vecteur radial* de Poynting » [à c^2 près] et écrit plus loin : « Dans l'analyse qui précède nous avons fait jouer un rôle à ce que nous avons appelé la quantité de mouvement de l'énergie électromagnétique ».

Commentaires élogieux de Abraham 1902, 1903, Langevin 1904, 1914, Wien 1915 (« article très important pour la physique théorique »).

Poincaré avance 4 raisons qui permettent à la théorie de Lorentz de satisfaire le PMR :

« 1. Cette compensation n'a lieu qu'en négligeant v^2, à moins de faire une certaine hypothèse complémentaire que je ne discuterai pas pour le moment.

2. Pour que la compensation se fasse, il faut rapporter les phénomènes, non pas au temps vrai t, mais à un certain *temps local* t' défini de la façon suivante.
Je suppose que des observateurs placés en différents points, règlent leurs montres à l'aide de signaux lumineux ; qu'ils cherchent à corriger ces signaux du temps de la transmission, mais qu'ignorant le mouvement de translation dont ils sont animés et croyant par conséquent que les signaux se transmettent également vite dans les deux sens, ils se bornent à croiser les observations, en envoyant un signal de A en B, puis un autre de B en A. Le temps local t' est le temps marqué par les montres ainsi réglées.
Si alors c est la vitesse de la lumière, et V la translation de la Terre que je suppose parallèle à l'axe des x positifs, on aura:

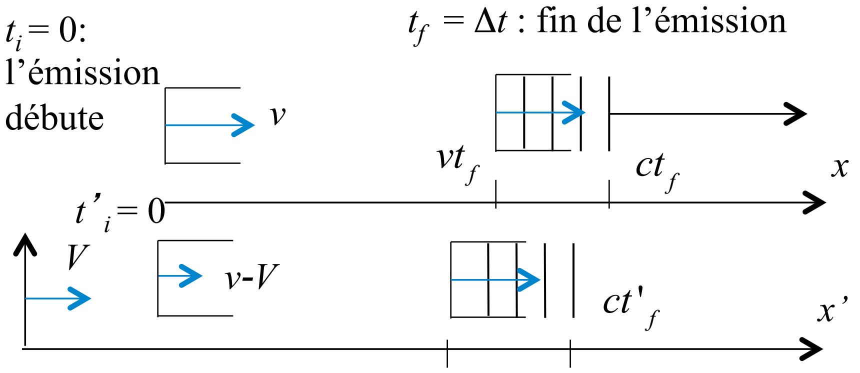
$$t' = t - Vx/c^2$$

(démo : réception du signal par B à $t' = l/c$, en $x = ct = l+Vt = l+Vx/c$ dans l'éther. En éliminant l on obtient le temps local t').

3. L'énergie apparente se propage dans le mouvement relatif suivant les mêmes lois que l'énergie réelle dans le mouvement absolu, mais l'énergie apparente n'est pas exactement égale à l'énergie réelle correspondante [ce que va montrer Poincaré sur l'exemple de l'énergie du rayonnement électromagnétique].

4. Dans le mouvement relatif, les corps producteurs d'énergie électromagnétique sont soumis à une force apparente complémentaire qui n'existe pas dans le mouvement absolu [la force de Liénard, qui apparaît dans la transformation de la force volumique de Lorentz] ».

Poincaré applique les changements de variables de Lorentz $x' = x - Vt, t' = t - Vx/c^2, \vec{E}' = \vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}, \vec{B}' = \vec{B} - \vec{V} \wedge \vec{E}/c^2$ au recul d'un oscillateur hertzien qui émet un train d'onde plan dans une direction donnée.



$x' = (v - V)t_f \quad ; \quad t'_f = t_f - V(vt_f/c^2)$

L Longueur *réelle* du train d'onde, *L'* longueur *apparente*

$$L' = L(1 + V/c)$$

Énergie *réelle JΔt*

Énergie *apparente J'Δt* $\quad J' = J(1 - V/c)$

Quantité de mouvement électromagnétique au premier ordre :

$$p' = J'\Delta t/c = p - VJ\Delta t/c\,[= p - VE/c]$$

Recul du « canon » (masse *m* constante)

réel: $\quad \Delta(mv) = m\Delta v = -J\Delta t/c$

apparent : $\quad \Delta(mv') = \Delta(m(v-V)) = \Delta mv = -J'\Delta t/c = -J\Delta t/c + \left(\boxed{JV/c^2}\right)\Delta t$

force de Liénard

« L'existence de la force complémentaire apparente est donc une conséquence nécessaire du phénomène de recul »

« Ainsi dans la théorie de Lorentz le principe de réaction [PRN] ne doit pas s'appliquer à la matière seule [PRE] ; le principe de mouvement relatif [PMR] ne doit pas non plus s'appliquer à la matière seule [force de Liénard]. Ce qu'il importe de remarquer c'est qu'il y a entre les deux faits une connexion intime et nécessaire »

C.B. et J.-P. Provost, *Henri Poincaré et la relativité 1900, 1905, 1912. Trois moments de sa réflexion.*

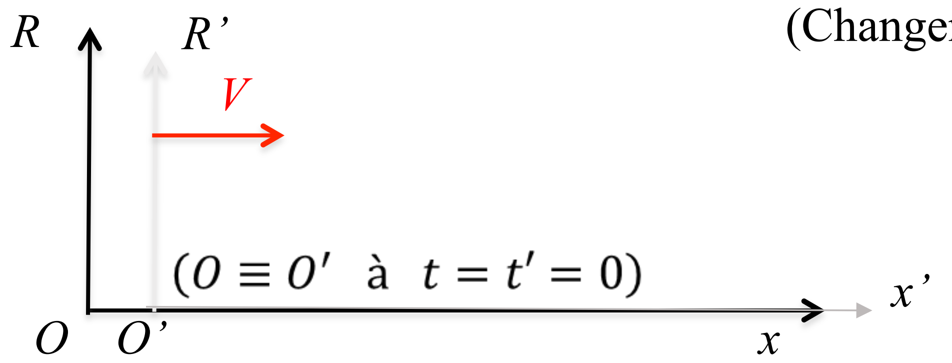
Les TL de 1895 dans l'enseignement?

Etablissement simplifié du « temps local »

$x' = x - Vt$ (1)

(Changement de variable « galiléen » qui conduit à $v' = v - V$)

Incompatible avec l'invariance de c



Si on demande l'invariance $c' = c$:

Équation d'un rayon lumineux dans R $\quad x = ct$; $\quad$ dans R' $\quad x' = ct'$

Par substitution dans (1) : $\quad ct' = ct - Vx/c \quad$ soit $\quad t' = t - Vx/c^2$ (2)

Quelques conséquences en terme de cinématique relativiste :

$$\Delta x' = \Delta x - V\Delta t$$

$$\Delta t' = \Delta t - V\Delta x/c^2$$

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - V}{1 - V\frac{\Delta x}{\Delta t}/c^2} \rightarrow v' = \frac{v - V}{1 - Vv/c^2}$$

Cas de la lumière $v = c$: $\quad v' = c \quad$ (invariance de c vérifiée)

Formule d'entraînement de Fresnel, 1818

Prisme d'Arago $\quad v = \frac{v' + V}{1 + Vv'/c^2} = \frac{c/n + V}{1 + V/cn} \sim (c/n + V)(1 - V/cn) = \frac{c}{n} + \boxed{V(1 - 1/n^2)}$

Passage à la relativité restreinte : exemple de la contraction des longueurs et dilatation des durées.

J.-P. Provost et C. B., The 1895 Lorentz transformations; historical issues and present teaching, *Eur. J. Phys*. **37**/4 (*Highlights* 2016)

Longeurs

Règle mobile ou onde dans R : $0 < x - vt < L$

Dans R' $(V \ll 1)$ $0 < (x' + Vt') - v(t' + Vx') < L$ ou $0 < x' - v't' < L'$

avec $L' = L(1 + Vv)$ et $v' = v - V(1 - v^2)$ ou $(1 - v'^2) = (1 - v^2)(1 + 2Vv)$

$L/\sqrt{1 - v^2}$ est invariant, donc $\boxed{L = L_0\sqrt{1 - v^2}}$ (contraction des longueurs)

Horloges

Durées

Δt intervalle de temps dans R et Δt' intervalle de temps correspondant dans R'

Horloge mobile dans R : $x = vt$

$\Delta t' = \Delta t - V\Delta x = \Delta t(1 - vV)$ $\rightarrow$ $\boxed{\Delta t\sqrt{1 - v^2} = \Delta t_0}$ (dilatation des durées)

Δt_0 est l'intervalle de temps propre indiqué par l'horloge mobile dans R quand il s'est écoulé Δt dans R.