

# BRANCHE D'EXCITATION DE HIGGS DANS LES GAZ DE FERMIONS SUPERFLUIDES

Yvan CASTIN  
LKB, École normale supérieure (Paris, France)

## Références :

- Y. Castin, H. Kurkjian, “Branche d’excitation collective du continuum dans les gaz de fermions condensés par paires : étude analytique et lois d’échelle”, *Comptes Rendus Physique* **21**, 253 (2020)
- Y. Castin, “Spectroscopie de Bragg et mode du continuum de paire brisée dans un gaz de fermions superfluide”, *Comptes Rendus Physique* **21**, 203 (2020)

## DESCRIPTION DU SYSTÈME

Atomes fermioniques à deux états internes  $\uparrow, \downarrow$ :

- cas tridimensionnel spatialement homogène, non polarisé  $N_\uparrow = N_\downarrow$
- interaction attractive à courte portée entre  $\uparrow$  et  $\downarrow$  dans l'onde  $s$  : longueur de diffusion  $a$ ,  $-\infty < a < +\infty$

État du système à  $T = 0$  d'après la théorie BCS:

- formation de paires liées ( $\uparrow\downarrow$ ) (par le mécanisme de Cooper si  $a < 0$ )
- ces paires liées forment un condensat, de paramètre d'ordre  $\Delta = g_0 \langle \hat{\psi}_\downarrow \hat{\psi}_\uparrow \rangle$
- deux cas limites : BCS (paires liées très étendues) et CBE (paires liées  $\approx$  dimères bosoniques)

limite BCS $k_F a \rightarrow 0^-$	limite CBE $k_F a \rightarrow 0^+$
$\mu \rightarrow \hbar^2 k_F^2 / 2m$	$\mu \sim -\hbar^2 / 2ma^2$
$\Delta / \mu = O(\exp(-\pi / 2k_F  a ))$	$\Delta /  \mu  = O((k_F  a )^{3/2})$

## LES EXCITATIONS ATTENDUES

- excitation collective (du centre de masse des paires) : branche acoustique  $\omega_q \sim cq$  comme dans tout superfluide
- excitation élémentaire par brisure d'une paire liée :

$$(\uparrow\downarrow)_0 \xrightarrow{U(r) \propto \cos q \cdot r} \left( \uparrow \right)_{q/2+k} + \left( \downarrow \right)_{q/2-k} \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad \mathbf{q} \leftrightarrow -\mathbf{q}$$

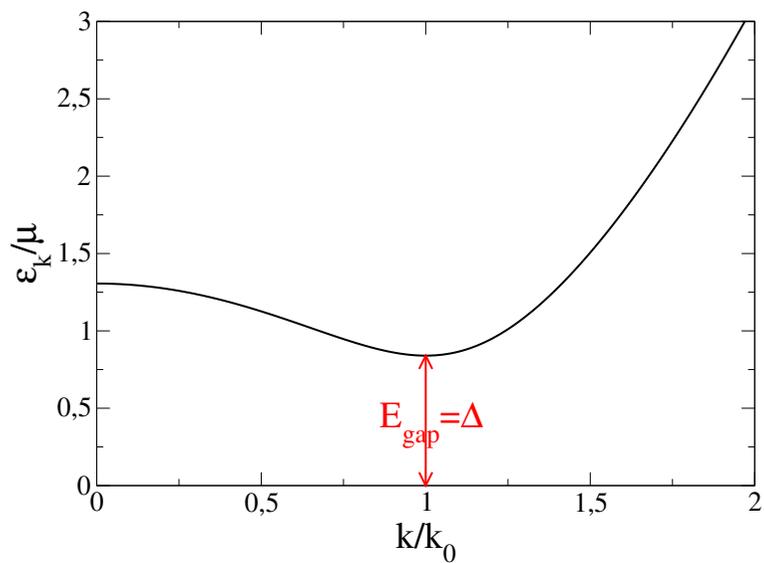
d'où un continuum de paire brisée  $\{\epsilon_{q/2+k} + \epsilon_{q/2-k}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3\} = [\epsilon_{\text{inf}}(\mathbf{q}), +\infty[$ .

- Relation de dispersion  $\epsilon_k$  des quasi-particules fermioniques:
  - si  $\mu > 0$ , bande interdite  $E_{\text{gap}} = \Delta$  atteinte en  $k = k_0 > 0$
  - si  $\mu < 0$ , bande interdite  $E_{\text{gap}} = (\mu^2 + \Delta^2)^{1/2} > \Delta$  atteinte en  $k = 0$
- Si on est expert de la théorie des champs : pour notre gaz de fermions, densité de lagrangien effectif de basse énergie (champ complexe relativiste dans un potentiel en chapeau mexicain)

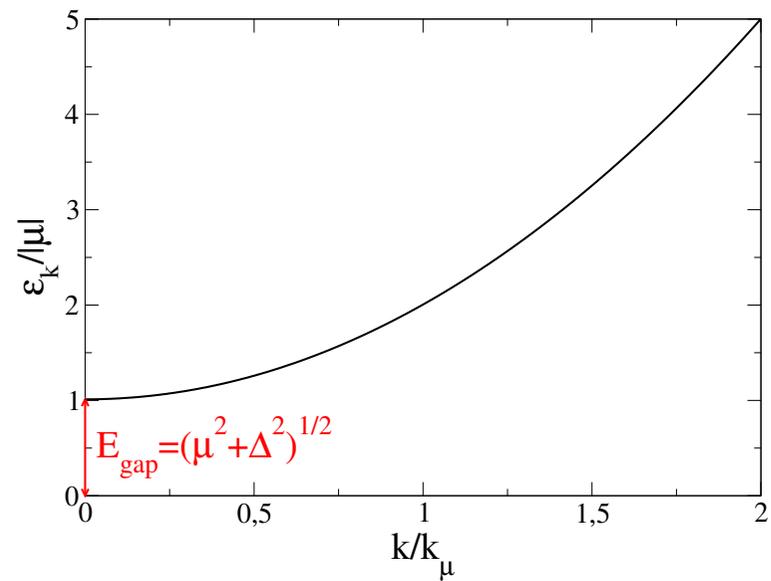
$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*) + a\phi^* \phi - b(\phi^* \phi)^2 \quad (a, b > 0)$$

$\implies$  **Deux** branches d'excitation collective : (1) branche de Goldstone de départ linéaire  $\omega = q$ , (2) branche de Higgs à bande interdite de départ quadratique  $\omega = (4b|\Delta|^2 + q^2)^{1/2}$ . Ici,  $b = 1$  (Pekker, Varma, 2015) : départ à  $2\Delta$ ... mais ceci n'est pas de basse énergie si  $E_{\text{gap}} = \Delta$ !

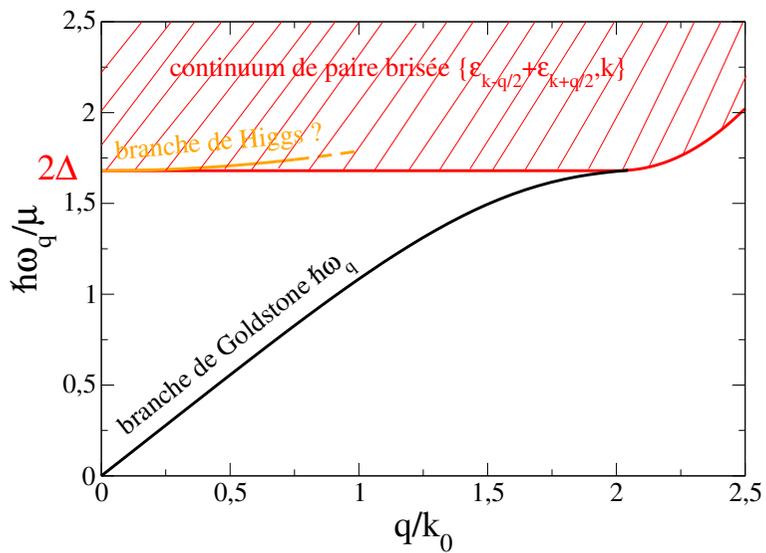
$\Delta/\mu=0,84$



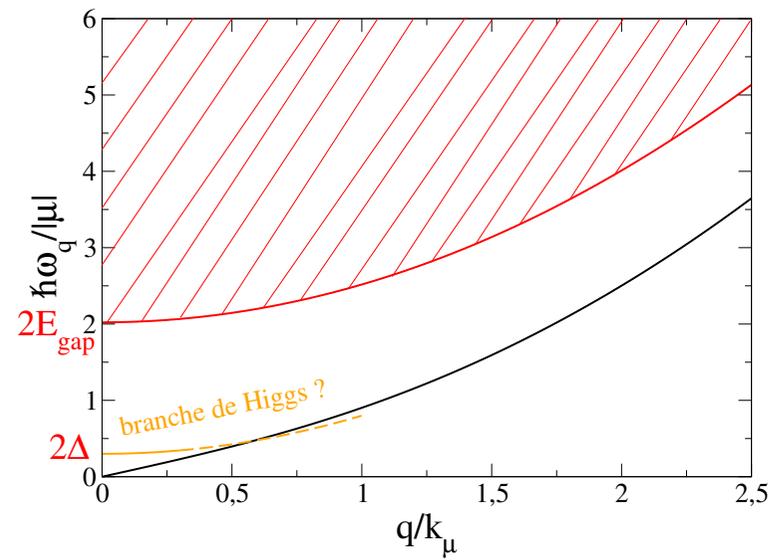
$\Delta/\mu=-0,15$



$\Delta/\mu=0,84$



$\Delta/\mu=-0,15$



## CALCUL DU SPECTRE D'EXCITATION DU SYSTÈME

Théorie variationnelle BCS dépendant du temps sous une belle forme:

- Après action du potentiel extérieur: état cohérent de paires de quasi-particules fermioniques

$$|\psi_{\text{BCS}}(t)\rangle \propto \exp \left[ - \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{k}} \beta_{\mathbf{kq}}(t) \hat{\gamma}_{\mathbf{q}/2+\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{\gamma}_{\mathbf{q}/2-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \right] |\psi_{\text{BCS}}^0\rangle$$

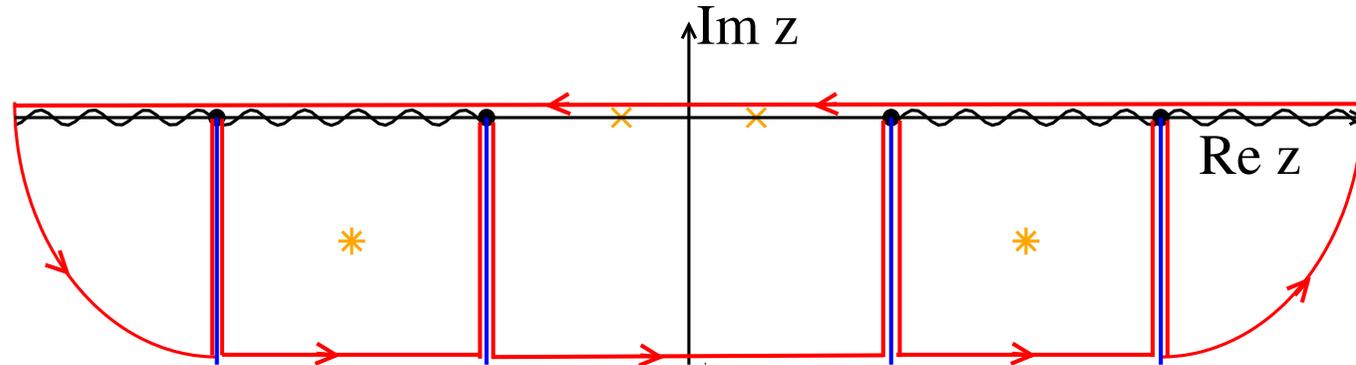
- Perturbation faible : amplitudes  $\beta_{\mathbf{kq}}$  infinitésimales, calcul au 1er ordre
- Les variables élémentaires  $\beta_{\mathbf{kq}}$  et  $\beta_{\mathbf{kq}}^*$  d'énergies  $\pm(\epsilon_{\mathbf{q}/2+\mathbf{k}} + \epsilon_{\mathbf{q}/2-\mathbf{k}})$  sont couplées aux variables collectives  $(\delta\Delta)_{\mathbf{q}}$ ,  $(\delta\rho_\sigma)_{\mathbf{q}}$  qui en dépendent
- équation fermée sur la transformée de Laplace des variables collectives

$$\begin{pmatrix} 2i\Delta(\delta\theta)_{\mathbf{q}}(t) \\ 2(\delta|\Delta|)_{\mathbf{q}}(t) \\ (\delta\rho)_{\mathbf{q}}(t) \end{pmatrix} = \int_{i0^++\infty}^{i0^+-\infty} \frac{dz}{2i\pi} \frac{e^{-izt/\hbar}}{M(z, \mathbf{q})} \begin{pmatrix} S_\theta(z, \mathbf{q}) \\ S_{|\Delta|}(z, \mathbf{q}) \\ S_\rho(z, \mathbf{q}) \end{pmatrix}$$

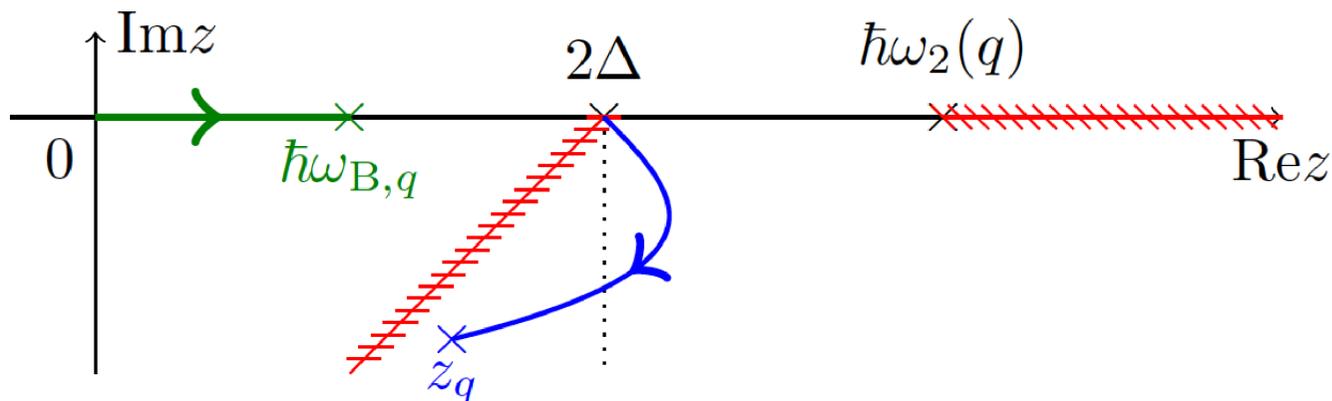
- La matrice  $M$  est intrinsèque (elle ne dépend pas de la perturbation):

$$M_{|\Delta||\Delta|}(z, \mathbf{q}) = \int_{\mathcal{D}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ \frac{(\epsilon_+ + \epsilon_-)(\epsilon_+\epsilon_- + \xi_+\xi_- - \Delta^2)}{2\epsilon_+\epsilon_- [z^2 - (\epsilon_+ + \epsilon_-)^2]} + \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \right]$$

- Point clé : ligne de coupure sur le continuum de paire brisée donc, pour appliquer le théorème de Cauchy, il faut déplacer les lignes de coupure dans le plan complexe (pour pouvoir les contourner) ce qui peut faire apparaître des pôles complexes.



- À retenir : les seules racines de  $\det M(z) = 0$  sont les modes de Goldstone  $\hbar\omega_q$  ; les modes de Higgs sont des racines complexes  $z_q$  du prolongement analytique  $\det M_{\downarrow}(z) = 0$  (d'où l'échec de Benfatto 2015).



## DÉPART DE LA BRANCHE (CAS $\mu > 0$ )

Si  $\mu > 0$ , le caractère fermionique sous-jacent est bien affirmé ( $k_0 \neq 0$ ) et la branche part quadratiquement de  $2\Delta$ :

$$z_q \underset{q \rightarrow 0}{=} 2\Delta + C \frac{\hbar^2 q^2}{2m} + O(q^3)$$

- même équation sur  $C$  que celle de Popov (1976) dans la limite BCS  $\Delta/\mu \rightarrow 0^+$  où  $C \propto \mu/\Delta$  (fait apparaître  $m_{\text{eff}}^{\text{BCS}}$  en  $k = k_0$ )
- $\text{Im } C < 0$  : le mode s'amortit par émission de paires brisées
- $\text{Re } C > 0$  pour  $0 < \Delta/\mu < 1,2$ . Pour  $\Delta/\mu > 1,2$ , on a  $\text{Re } C < 0$  donc le mode semble entrer dans la bande interdite... mais souvenons-nous de la ligne de coupure déplacée séparant le pôle de l'axe réel physique
- résidus du pôle (poids spectraux du mode) toujours de limite nulle en  $q = 0 \implies$  **jamais de mode de Higgs si  $q = 0$ :**

$$Z_{|\Delta||\Delta|} \propto q \quad Z_{\theta\theta} \propto q^3 \quad Z_{\rho\rho} \propto q^5$$

Ne pas en déduire que le mode est un pur mode de module (le couplage  $M_{|\Delta|\theta}$  ne peut pas être négligé sauf dans la limite BCS).

## LIMITE CBE $\Delta/\mu \rightarrow 0^-$ (CONDENSAT DE DIMÈRES BOSONIQUES)

Deux branches d'excitation trouvées par prolongement analytique:

- une branche hyperacoustique

$$z_q \underset{q \rightarrow 0}{\sim} Aq^{4/5} \quad (\text{Im } A < 0)$$

- une branche de Higgs “dans la bande interdite” (cherchée en vain par Benfatto 2015)

$$z_q \underset{q \rightarrow 0}{=} 2\Delta - Bq^2 + O(q^3) \quad (B > 0, \text{Im } z_q = O(q^3))$$

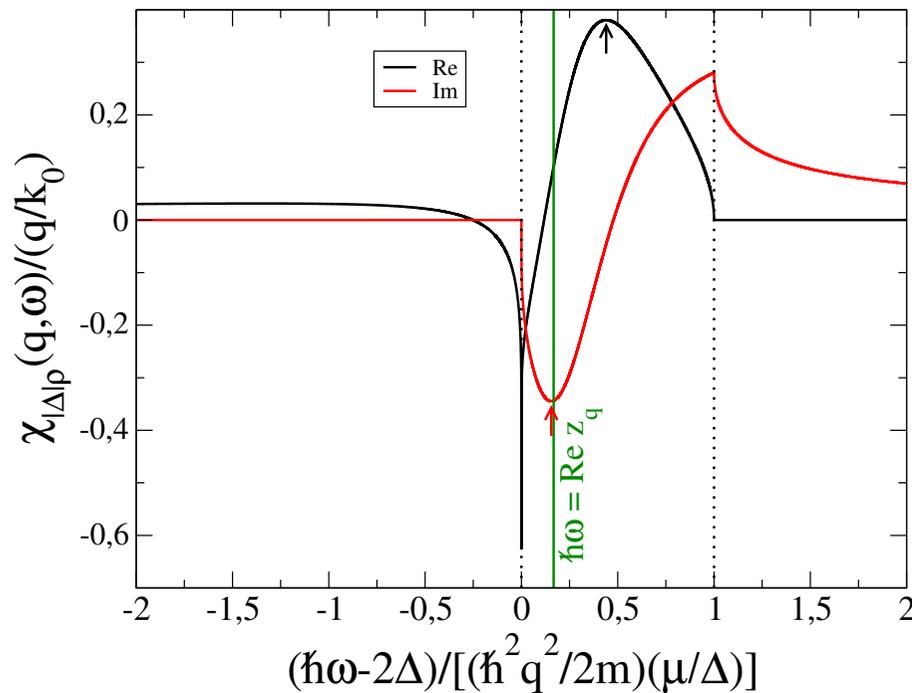
avec une courbure négative ( $\neq$  de la théorie effective relativiste à chapeau mexicain)

- Contrairement à ce que laissait entendre Stringari (2012), la branche de Higgs commence toujours à  $2\Delta$ , pas à  $2E_{\text{gap}}$
- Malheureusement ici  $2\Delta \ll \epsilon_{\text{inf}}(0) = 2(\Delta^2 + \mu^2)^{1/2} \sim 2|\mu|$  donc la branche de Higgs semble inobservable. Une question philosophique : existe-t-elle quand même ?

## VOIR LA BRANCHE DE HIGGS PAR EXCITATION DE BRAGG

On applique sur le gaz par laser un potentiel  $\propto \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ . C'est une excitation en densité. On mesure la perturbation induite sur le module du paramètre d'ordre (fonction de réponse  $\chi_{|\Delta|\rho}(\mathbf{q}, \omega)$ ).

$\Delta/\mu=1/2$ , limite des faibles  $q$

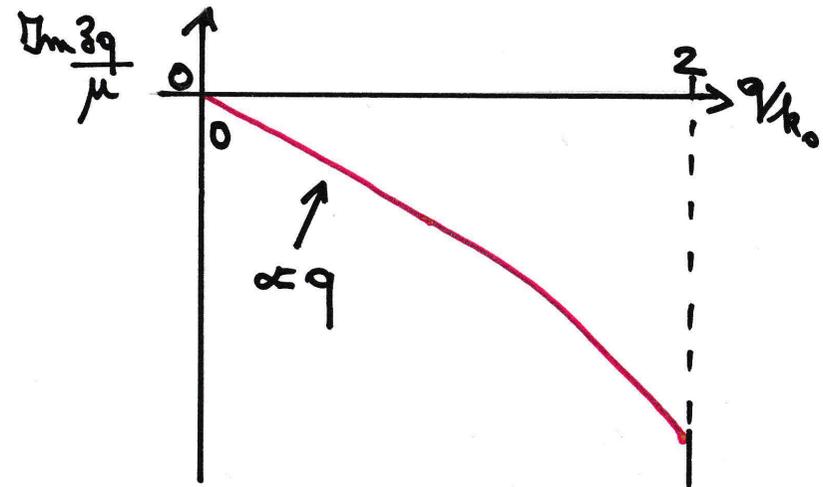
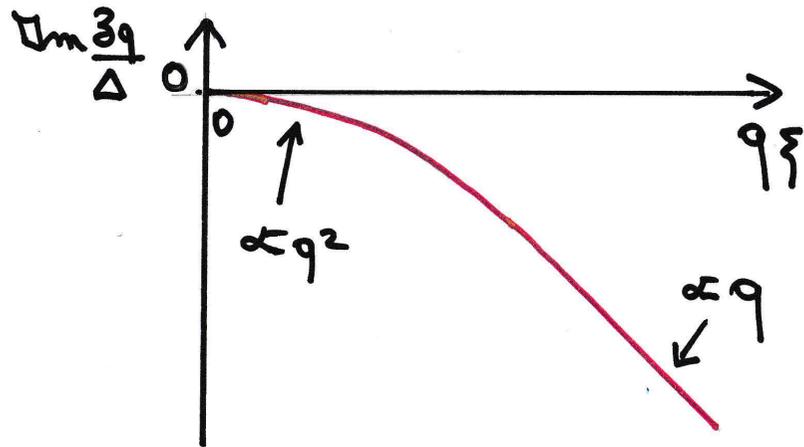
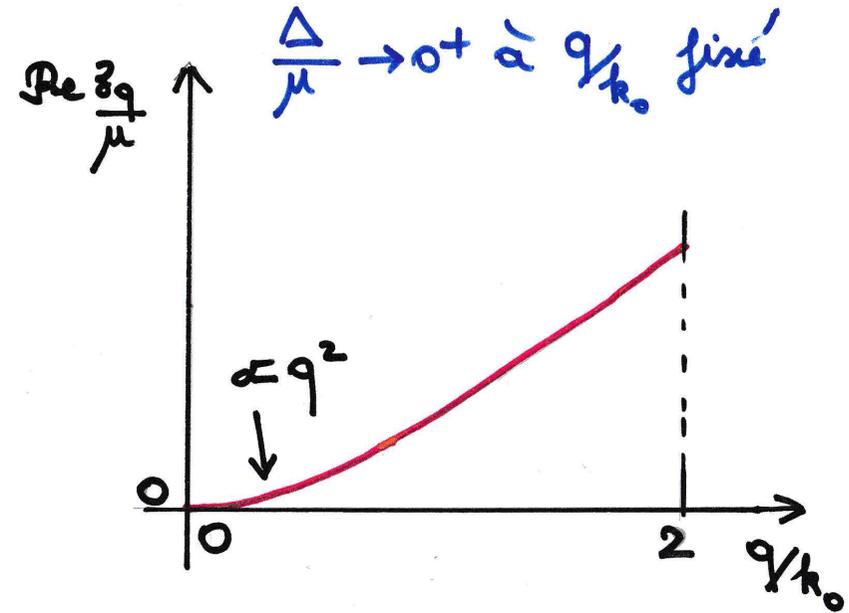
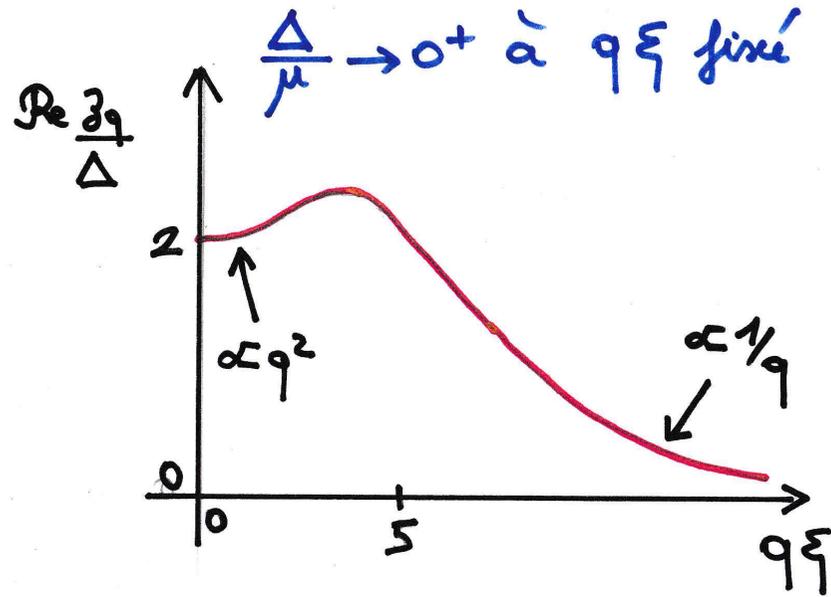


Un ajustement permet d'extraire  $z_q$  et  $|Z_{|\Delta|\rho}|$  avec une bonne précision pour  $0,2 \leq \Delta/\mu \leq 2$  (ça marche encore si  $\text{Re } z_q < 2\Delta$ ):

$$\chi_{|\Delta|\rho}(\mathbf{q}, \omega) \simeq \underbrace{\frac{A}{\omega - B}}_{\text{résonance}} + \underbrace{C + D\omega}_{\text{fond lentement variable}}$$

$$(A, B, C, D \in \mathbb{C})$$

DANS LA LIMITE BCS  $\Delta/\mu \rightarrow 0^+$



## CONCLUSION

Dans un gaz d'atomes froids fermioniques à  $T = 0$ :

- nous prédisons l'existence d'une branche de Higgs (départ quadratique en  $2\Delta$ ) du côté BCS  $\mu > 0$  et du côté CBE  $\mu < 0$  si  $\Delta/|\mu| < 0,222$
- cette branche s'obtient toujours par prolongement analytique des équations sur les fréquences propres (RPA d'Anderson) mais n'est pas toujours observable (poids spectral nul en  $q = 0$  ; très éloignée de l'intervalle de prolongement analytique dans la limite CBE)
- elle devrait cependant être observable dans le raccordement CBE-BCS  $0,2 \leq \Delta/\mu \leq 2$  par excitation de Bragg et mesure du module du paramètre d'ordre  $|\Delta|$  (Chris Vale pourrait le faire à Swinburne, par exemple)
- elle a une structure riche (trois échelles de nombre d'onde) dans la limite de couplage faible  $\Delta/\mu \rightarrow 0^+$