LES MILLE VIES DE L'EQUATION DE LANGEVIN

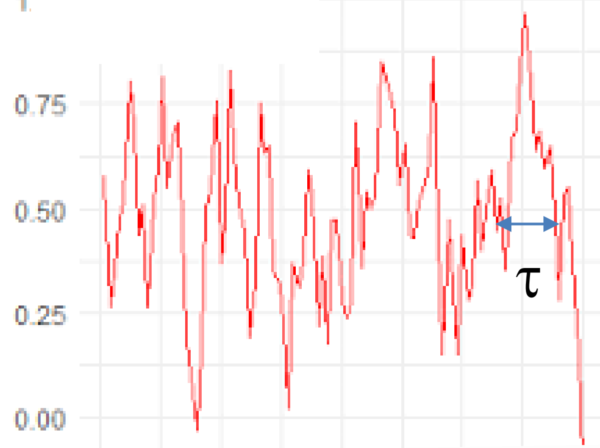
Jean-Philippe Bouchaud
CFM & Académie des Sciences

« Sur la théorie du mouvement Brownien »
CRAS, 1908

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} = -6\pi\mu a\frac{dx}{dt} + X.}$$

Ces mystères nous échappent, feignons d'en être les organisateurs

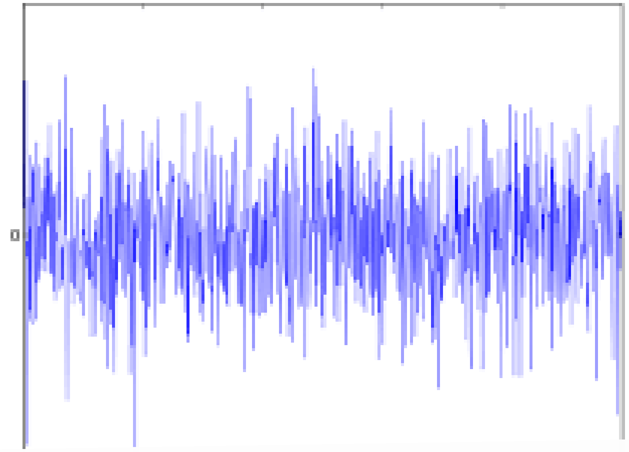
- Cherche à rendre transparente la démonstration un peu laborieuse d'Einstein (1905) : D = kT ν, reliant diffusion D et mobilité ν
- Idée centrale : décomposer la force extérieure en une partie moyenne déterministe (friction, potentiel extérieur) et une partie fluctuante X, de moyenne nulle, décrivant les collisions aléatoires
- X(t) est le « bruit de Langevin »
- Première eq. diff. stochastique, mais sans vraiment spécifier X !



Sur la force complémentaire X nous savons qu'elle est indifféremment positive et négative, et sa grandeur est telle qu'elle maintient l'agitation de la particule que, sans elle, la résistance visqueuse finirait par arrêter.

Une bombe à retardement : Ito vs Stratonovich

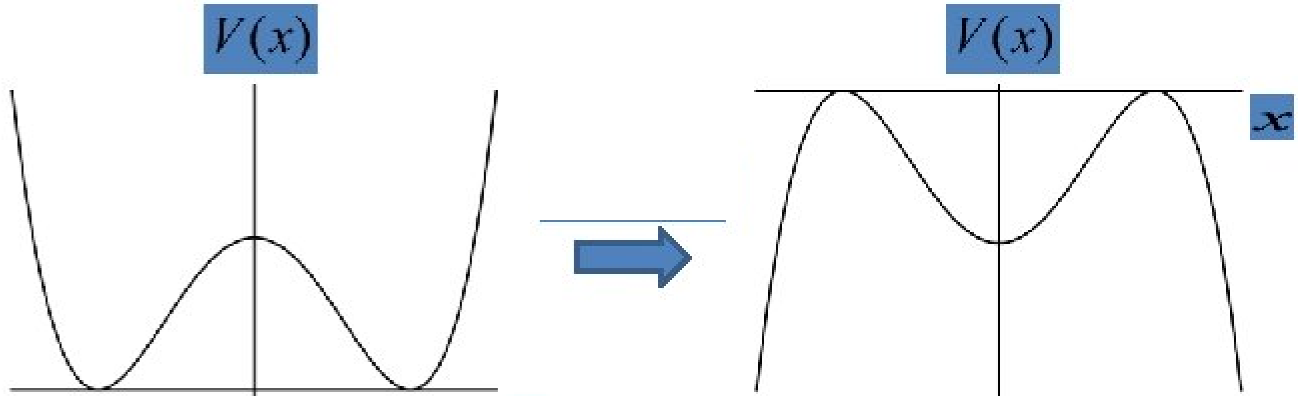
- Mais quelle est la nature du bruit de Langevin X ?
- Pour les physiciens: une variable aléatoire (Gaussienne ?) qui « varie vite » par rapport aux temps expérimentaux ($\tau << t$), mais qui se souvient « un peu » de son passé
- Les règles du calcul différentiel restent les mêmes (« Stratonovich »)



Sur la force complémentaire X nous savons qu'elle est indifféremment positive et négative, et sa grandeur est telle qu'elle maintient l'agitation de la particule que, sans elle, la résistance visqueuse finirait par arrêter.

Une bombe à retardement : Ito vs Stratonovich

- Mais quelle est la nature du bruit de Langevin X ?
- Pour les mathématiciens: un drôle d'objet aléatoire qui varie infiniment vite ($\tau \rightarrow 0$) mais qui est infini partout: le nouveau X est totalement indépendant de tout le passé
- Les règles du calcul différentiel changent, une nouvelle contribution dite de « Ito » apparaît (cf. Doeblin) – voir plus loin



$$\frac{dx}{dt} = \nu F(x) + X(t)$$

F(x): Force extérieure

La limite « visqueuse » et la loi d'Arrhénius

- On néglige les effets inertiels (m=0)
- Trajectoire la plus probable : $X(t) \equiv 0$, mouvement déterministe
- Trajectoire la moins improbable qui permet à la particule de franchir la barrière : $\frac{dx}{dt} = -\nu F(x)$ (puis mouvement déterministe)
- Probabilité de la séquence $X(t) = -2\nu F(x)$: $\mathbb{P} = \exp(-\Delta V/kT)$
- Rôle de queues non Gaussiennes?

THÉORIE

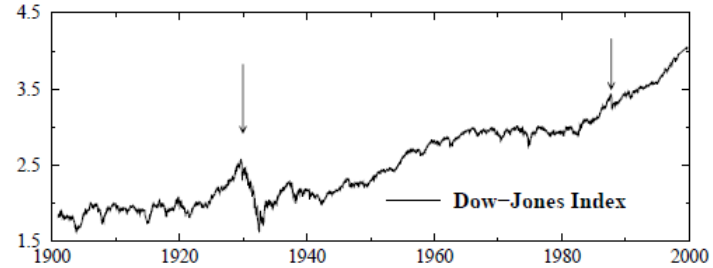
DE

LA SPÉCULATION,

PAR M. L. BACHELIER.

INTRODUCTION.

Les influences qui déterminent les mouvements de la Bourse sont innombrables, des événements passés, actuels ou même escomptables, ne présentant souvent aucun rapport apparent avec ses variations, se répercutent sur son cours.

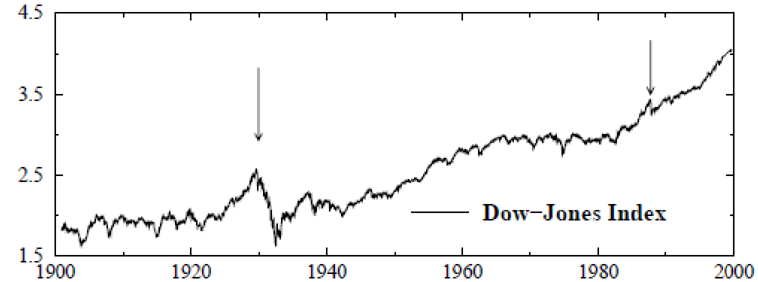


$$\boxed{\frac{dp}{dt} = \mu + X(t)}$$

Bachelier (1900) & Black-Scholes (1973)

- Le modèle de Bachelier: une équation de Langevin pour les prix!
- « Options »: assurances contre la hausse/la baisse des cours
- Le prix $\mathcal{C}$ de cette assurance dépend du cours et de sa distance au seuil au delà duquel l'assurance se déclenche: $\mathcal{C}$(p,t)
- Si le mouvement du prix X n'est pas anticipable et Gaussien, la variation de $\mathcal{C}$(p,t) donnée par Ito: $\frac{d\mathcal{C}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{D}{2}\frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial p^2}$

$$\frac{d\mathscr{C}}{dt} = \frac{\partial \mathscr{C}}{\partial t} + \frac{\partial \mathscr{C}}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{D}{2}\frac{\partial^2 \mathscr{C}}{\partial p^2}$$



Eur. Phys. J. B **6**, 543–550 (1998)

THE EUROPEAN PHYSICAL JOURNAL B

A Langevin approach to stock market fluctuations and crashes

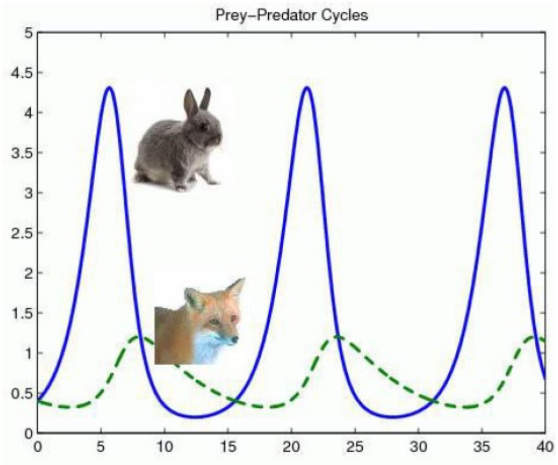
J.-P. Bouchaud[1,2,a] and R. Cont[1,2]

Bachelier (1900) & Black-Scholes (1973)

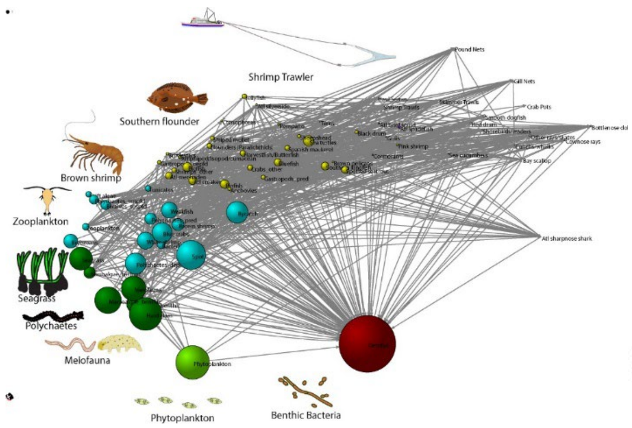
- Si l'assureur vend exactement $\Phi = \frac{\partial \mathscr{C}}{\partial p}$ actions à assurer, son bilan financier ne dépend <u>plus du tout</u> de la variable aléatoire X !
- Autrement dit son risque est nul et le prix de l'assurance est donné par l'équation de Black & Scholes (prix Nobel 1995)

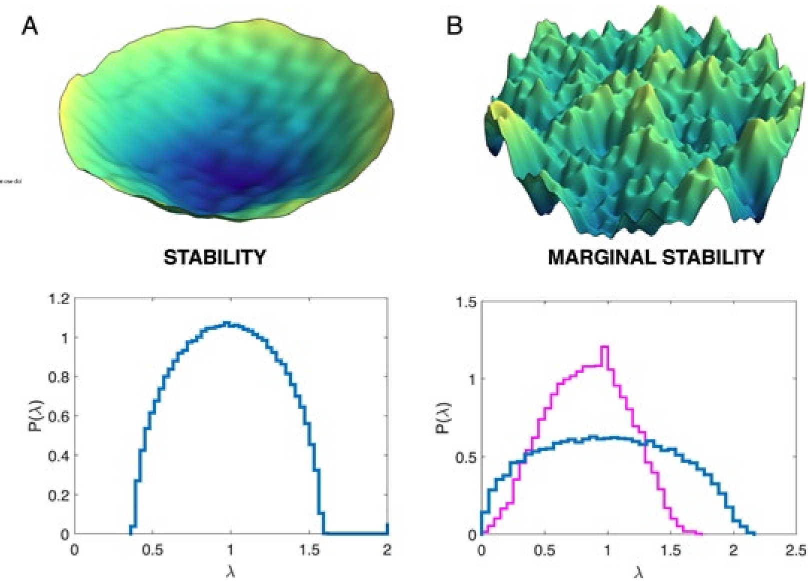
$$\boxed{\frac{\partial \mathscr{C}}{\partial t} + \frac{D}{2}\frac{\partial^2 \mathscr{C}}{\partial p^2} = 0}$$

- Mais le risque nul ne résiste pas aux krachs (et BS en a causé un!)



2 species Lotka-Volterra



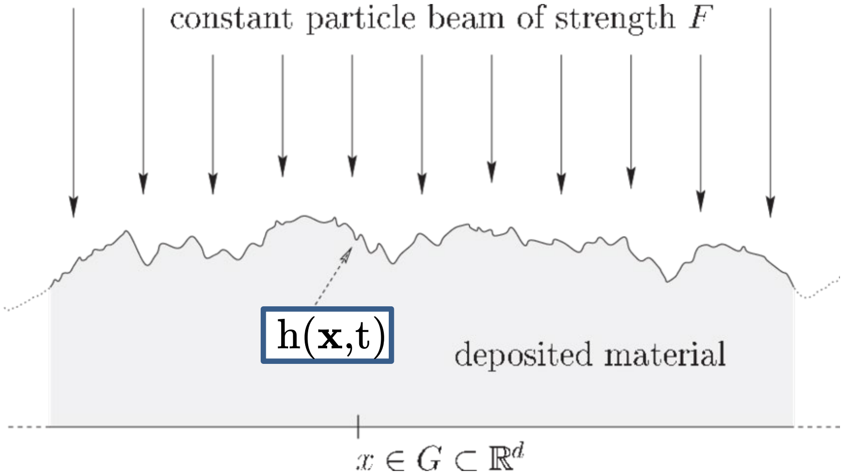


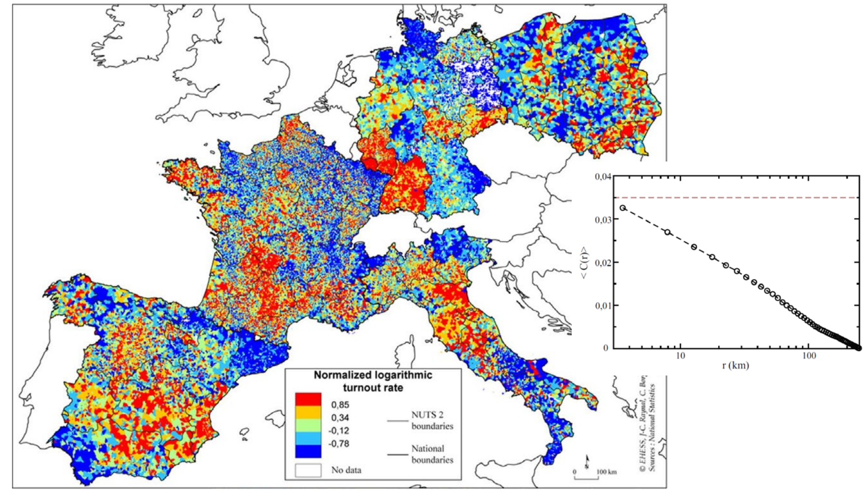
Lotka-Volterra multi-espèces

$$\frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}t} = \left(\kappa_i - \sum_j J_{ij} N_j\right) N_i + \sqrt{N_i}\, X_i(t)$$

- = fitness + competition/symbiose + « bruit démographique » (Ito!)
- Le bruit de Langevin peut induire une transition de phase entre une écologie « marginalement stable » et une écologie fluctuante

Cf Sir Robert May (1972); Biroli, Bunin, Cammarotta (2017)

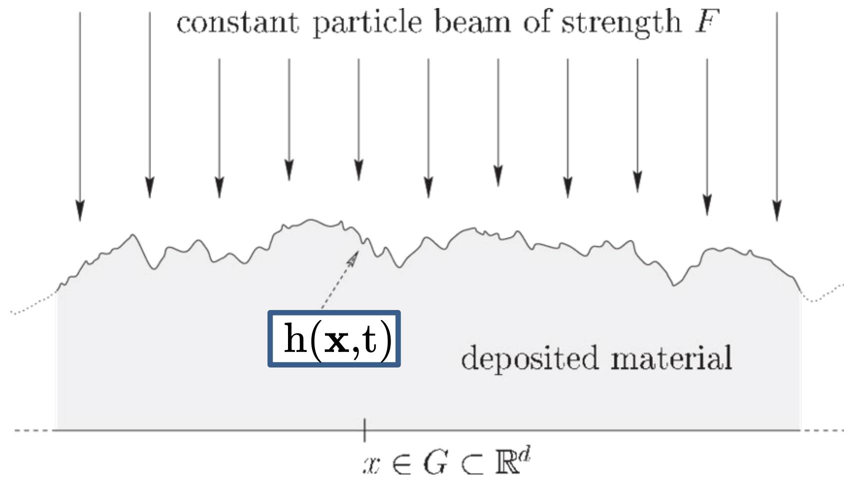




Taux de participation, Européennes 2004
Borghesi, Raynal, JPB

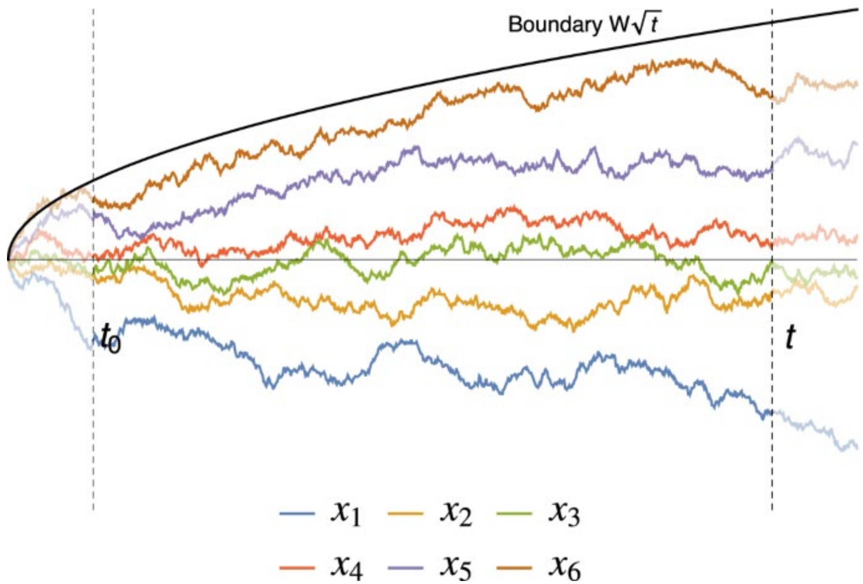
L'équation de Langevin pour des champs

- Example: la croissance d'interface soumise à un bruit de déposition
- Le modèle d'Edwards-Wilkinson : $$\frac{\partial h(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \gamma \Delta h(\mathbf{x},t) + F + X(\mathbf{x},t)$$
- Décrit aussi les fluctuations thermiques des interfaces, ou les conformations de dislocations, de lignes de vortex, polymères, etc.
- Ou la dynamique d'un « champ d'opinion » avec mimétisme local
- Pour d=2, les corrélations spatiales de $h(\mathbf{x},t)$ sont en $\log|\mathbf{x}|$



L'équation de Langevin pour des champs

- Croissance d'interface avec bruit de déposition + non-linéarités
- Le modèle de Kardar-Parisi-Zhang : $\dfrac{\partial h(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \gamma \Delta h(\mathbf{x},t) + \lambda(\nabla h(\mathbf{x},t))^2 + X(\mathbf{x},t)$
- L'interaction entre le bruit et la non-linéarité change les corrélations de h(**x**,t)
- 6000 citations + une médaille Field (M. Hairer)
- Nombreuses analogies et applications – par exemple trafic routier
- Nb: les queues de X sont importantes !



Le mouvement Brownien de Dyson

- Un modèle de matrices aléatoires: $\mathbb{A}(\mathbf{t+dt}) = \mathbb{A}(\mathbf{t}) + \mathbf{dt}\ \mathbb{W}$
- Comment évoluent les valeurs propres (supposant $\mathbb{W}_{\mathrm{ij}} = \mathbb{W}_{\mathrm{ji}}$ iid) ?
- Théorie des perturbations au deuxième ordre → Langevin !

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_i}{\mathrm{d}t} = X_i(t) + \sum_{j\neq i} \frac{\sigma^2}{\lambda_i - \lambda_j}$$

- « Gaz de Coulomb » à une dimension → Wigner
- Valeur propre maximale: Tracy-Widom et lien avec KPZ

Les mille et une vies de l'équation de Langevin

- Processus stochastiques
- Physique statistique à l'équilibre et hors équilibre (Dean-Kawasaki)
- Algorithmes numériques :
  - Langevin vs. Monte-Carlo, Quantification Stochastique (Parisi-Wu)
  - « Stochastic gradient descent » et Apprentissage Machine
- Dynamique de Langevin en haute dimension (cf. verres, verres de spin)